翻訳

訳者緒言

リヒャルト・デデキント(Richard Dedekind,1831-1916)の論考、『連続性と無理数(Stetigkeit und Irrationale Zahlen)』(1872) を日本語に翻訳する。Richard Dedekind; Gesammlte Mathematische Werke, Hrsg.Robert Fricke, Emmy Noether.Braunschweig.Bd.3. 1932.を底本とした。訳語に（ ）で原語を添えることがあり、また文章中で必要と認めた場合、[　]で言葉を補うことがある。なお原著ではしばしばアルファベット記号が斜字体になっているが、視覚的にうるさいので（個人的事情)、通常の字体にした。数式については技術的理由で原著と一致しないことがある。冒頭の「献辞」の翻訳は省略した。(金田千秋)

(A)「連続性と無理数(Stetigkeit und Irrationale Zahlen)」(1872)

この小冊子の主題をなす考察は、元をたどれば1858年の秋にさかのぼる。この年、チューリヒ連邦高等工業専門学校(eidgenössisches Polytechnikum zu Zürich)の教授になったばかりの私は、微分計算の初級を初めて担当することになったが、算術(Arithmetik)の具体的な学問的基礎づけ(eine wirklich wissenschaftliche Begründung))がどこにも見当たらないことを改めて痛感したのでだった。ある変量が特定の極限値に接近するという考え方を理解させるとき、とりわけ、「ずっと増え続けるが、どんな限界でも超えてしまうわけではない、そんな量はかならずある極限値に近づかなければならない」という定理(Satz)を証明してみせるとき、私は「幾何学的に明らかだ」という言い抜けをしないでは済まなかったのである。いまでも私は、微分計算の初回の講義でこういう形で幾何学的直観(geometrische Anschauung)を引き合いに出すことは、教育的観点からは極めて有益だと思うし、時間の制約がある場合には必須だとさえ思う。だが、こんなやり方で[生徒を]微分計算に馴染ませることに学問性の点で疑義があることは、おそらく誰も否定しないだろう。さて、不満があまりにも抑えがたいものだったので、私はこう腹を決めたのである。無限小解析の諸原理(Prinzipien)を純粋に算術的な(arithmetisch)仕方で、しかも十分に厳密な仕方で基礎づけるまで、とことん考えてみようではないか、と。私はそう腹を決めたのである。微分計算は連続量を扱うとよく言われるが、その連続性(Stetigkeit)を説明できた人はいない。また微分計算を最高度に厳密に定式化したと称する人も、その実態は連続性に立脚しておらず、むしろ、(意識的にせよ無意識的にせよ)幾何学的イメージ(Vorstellungen)に訴えるか、幾何学に誘発されたイメージに訴えるか、さもなくば純粋に算術的に証明されたとは言い難い命題(Sätze)に頼るのが常である。例えば前掲の定理もこうした[幾何学的イメージに訴えて理解するという]扱いを受けてきた口である。さて、よくよく吟味した結果、私は[むしろ]、この定理またはそれと同値な一連の定理[こそ]が、ある意味で無限小解析の土台の任を果たす当のものではないのか、との確信を抱くに至ったのである。さてそうだとすると、次にしなければならないのはこうである。この定理の本当の起源を算術の諸原理のなかに発見し、そこから直ちに連続性の本質の実効的な定義(Definition)を導き出すこと、まさにそれが次になすべき仕事である。私は1858

年の 11 月 24 日にそれを成し遂げ、数日後にはその考察の成果を親友の Durège に報告し、そこから長い活発なやりとりが始まった、というのがことの流れである。その後、算術の学問的な基礎づけの構想について研究者の誰彼とも議論を交わし、この地ヴラウンシュヴァイクに転任してからも、教授たちの学問的な集まりで一度このテーマについて話したこともある。ただ正式な公表(Publikation)については、すんなり決断することはできなかった。というのは、そもそもそれは言葉にするのが決して容易でないし、加えて主題自体もそこからすぐ結果が出てくるという類のものではないからである。それでも、この刊行物にはこの主題で行こうとほぼ腹を決めた矢先、いまからほんの数日前の 3 月 14 日のことになるが、E.ハイネの論文『関数論の原理』(クレレ雑誌。巻 74) を令名高い筆者の御高配により賜り、それが拙稿の公表の決心を後押しする結果となった次第である。さて本質的な部分について、私は[ハイネの]論考の内容に完全に同意するし、しないでいられる筈もない。ただ腹蔵なく言わせてもらうなら、私の議論の方が形式的に簡明であり、核心部分をより鮮やかに浮き彫りにしていると自負している。さてこの前書きを書いている折も折 (1872 年 3 月 20 日)、G.カントールの興味深い論文、『三角数列の理論によるある定理の拡張』(クレプシュ・ノイマン数学雑誌、巻 5)を受け取ったことについて、慧眼をもって鳴る著者に深甚なる謝意を表しておきたい。ざっと目を通したところ、その§2 の公理(Axiom)は、外観の差を度外視すれば、私が[本稿の]§3 で連続性の本質として提示した公理と一致する。ただ、私が抱く「それ自体で完結した実数領域」というイメージに照らすとき、単に概念上とは言え、[すでに知られた]実数量と区別(Verschiedenheit)してさらに高階の実数量を導入することがなんの役に立つのか、私にはまだよくわからない。

§1　有理数の性質

有理数(rationale Zahl)の算術の形成過程は既知のものとする。ただ、私が採用する視点をあらかじめ明確にしておく意味で、[有理数の算術の]いくつかの主要契機を議論抜きでおさらいしておくのが得策だと思う。「数えること(Zählen)」の、つまり「もっとも単純な算術的行為(arithmetische Akt)」の必然的もしくは少なくとも自然な帰結というのが、算術全体に対して私が抱くイメージである。この場合、「数えること」とは、正の整数の無限列を逐次的に創出すること(die sukzessive Schöpfung)に他ならず、まさにその逐次的創出において個(Individuum)が直接に先行する個によって確定(definieren)されるのである。また、「もっとも単純な行為」というときは、すでに創出された個からそれに続く新たに創造すべき個への移行のことを考えている。さてこれらの数の連鎖は、[一方で]人間精神(menschliches Geist)のための極めて有用な補助手段としての地位を確保して久しく、[他方で]それは驚くべき諸法則(Gesetze)の汲めども尽きぬ沃野の存在を告知しており、まさ

にそこに踏み入るためにこそ四つの算術的な基本演算(Grundoperation)は必要なのである。あの極めて単純な行為の任意の反復(Wiederholung)を一つの行為として集約すること(Zusammenfassung)が加算であって、これと同じ手続きで加算から乗算が生成する。加算と乗算の二つの演算が常に実行可能なのに対して、その逆の演算、すなわち減算と除算の妥当範囲には制限がかかっている。さて何が[この四つの基本演算への(dazu)]最初の誘因となったのか、あるいは経験とどう比定しどう類推したことが、[この四つの基本演算についての]直観(Anschauungen)を育んだのかという点には、いまは立ち入らない。ここでは次のことさえ言っておけば十分だろう。間接的な演算[減算と除算]の遂行可能性に制限がかかっていること自体が、その折々に新たな産出行為の真の動因となったのだ、と。負数と分数は人間精神によってそうやって創出されたのである。すべての整数の体系に比べて完全性において格段に優れた測定装置(Instrument)が誕生したのは、すべての有理数の体系(System)でのことだった。この[有理数の]体系を私はRと呼ぶが（注)、それはとりわけ完全性と閉性において際立っている。(なお完全性と閉性については他所で<u>数体</u>(Zahlkörper)の特徴として触れたことがある)。ちなみに完全性と閉性とは、四つの基本演算がRのどの二つの個についても常に遂行可能であること、つまりその基本演算の結果が（0による除算を唯一の例外として）かならずRの特定の個に落ち着くことを意味する。

（注）<u>P・G・ルジューヌ・ディリクレ</u>の「数論講義」、第二版、§159。

だが我々の直接の目的に照らしてはるかに重要なのは、体系 R に備わるもう一つの性質である。人はこの性質を、「二つの相対立する側に無限に伸びる、整序された一次元領域(ein wohlgeordnetes, nach zwei entgegengesetzten Seiten hin unendliches Gebiet von einer Dimension)」という言い方に持っていこうと(dahin)するが、この表現の趣旨は、幾何学的イメージからの借用表現がそこに持ち込まれている点であからさまであり、そうであればこそ、それに取って代わるべき(entsprechend)純粋に算術的な特性を押さえることが急務なのである。算術がそれと異質な(fremd)[幾何学的]表象を必要とする[ことはもちろん、それを必要とする]かのように見えること(Anschein)さえ(nicht einmahl)望ましくないからである。

記号aとbが同じ一つの有理数を意味する(bedeuten)ことを表わすには、a=bあるいはb=aと記す。二つの有理数a,bが異なるとは、差異a−bが正値か負値のいずれかであることと解する。前者ならaはb<u>より大きい</u>、bはa<u>より小さい</u>と言われ、a＞b、b＜aと表記される。後者の場合、つまりb−aが正値の場合、b＞a、a＜bである。これら[二つの有理数のより大きい、より小さいという]異なり方の二つの可能性については、次の法則が成り立つ（注)。

(I)a＞b、b＞c なら a＞c である。a と c が別の（つまり不等な）数で、b が[a と c の]一方より大きく、他方より小さいのなら、その幾何学的な趣きを厭わず(ohne Scheu vor dem Anklang an geometrische Vorstellungen）、簡潔に「b は二つの数 a と c の間に(zwischen)ある」と表現する。

(II)a と c が二つの異なる[有理]数なら、a と c の間には、互いに異なる無限に多くの[有理]数 b が存在する。

(III)ある[有理]数 a をとると、体系 R のすべての数は A_1 と A_2 という、それぞれ無限に多くの個を含む二つのクラスに分裂する(zerfallen)。つまりクラス A_1 は＜a であるすべての[有理]数 a_1 を含み、第二のクラス A_2 は＞a であるすべての[有理]数 a_2 を含む。a をどちらのクラスに入れるかは任意であり(nach Belieben)、入れ方によって、a は第一のクラスの最大数になるか、第二のクラスの最小数になるか、いずれかである。いずれの場合も、体系 R を二つのクラス A_1 と A_2 に分解(zerlegen)するとき、その分割には、「第一のクラス A_1 の各数は、第二のクラス A_2 の各数より、小さい」という特性が備わっている。

（注）以下においては、「絶対値で(absolut)」と断らない限り、かならずいわゆる「代数的」な大小関係を意味する。

§2　有理数を直線上の点に比定する

前節で指摘した有理数の性質[つまり有理数の体系を二つのクラス A_1, A_2 に分割するとき、第一のクラス A_1 の各数は、第二のクラス A_2 の各数より、小さいという性質]は、直線(gerade Linie) L の上の、点(Punkt)と点の相互的位置関係を想起させる。線上に相対立する二つの方向(Richtungen)が存在していて、これら二つの方向は「右向き(rechts)」と「左向き(links)」の方向として区別されるとする。異なる二点 p、q を[線上に]とると、p が q の右側にあって同時に q が p の左側にあるか、あるいは逆に、q が p の右側にあって同時に p が q の左側にあるか、そのいずれかである。p と q が現実に異なる点の場合、第三の可能性はない。さてこの位置の相違については以下の法則が成り立つ。

(I)p が q の右側にあり、さらに q が r の右側にあるなら、p も r の右側にある。このとき q は p と r の間にあると言われる。

(II)p と r が異なる二点なら、p と r の間にはかならず無限に多くの点 q が存在する。

(III)p を L 上のある点とすれば、L 上のすべての点は、それぞれ無限に多くの個を含む二つのクラス P_1 と P_2 に分裂する(zerfallen)。それは、第一のクラス P_1 は p の左側にある点 p_1 をすべて含み、第二のクラス P_2 は p の右側にある点 p_2 をすべて含むという意味である。点 p 自体をどちらのクラスに入れるかは任意である。いずれにせよ、[直]線 L が P_1 と P_2 と

いう二つのクラスまたは二つの部分に分解(Zerlegung)された場合、この分解には「第一のクラスの各点は、第二のクラスの各点の、左側にある」という特性が認められる。

[前節の末尾と本節直近の二段落で]確認した、有理数と直線上の点のこの[抽象的な]類比関係(Analogie)は、周知のように、線分(Strecke)を測定(Ausmessung)する目的で、まず線[L]の上に特定の出発点つまり原点ｏを置き、さらに一定の長さの単位を選定することによって、［有理数と点の間の]具体的な(wirklich)関係に姿を変える。この長さの単位のおかげで、どんな有理数ａに対しても、それに対応する長さが構成でき(konstruiert)、点ｏから、ａ が正なら右側に、ａ が負なら左側に、この長さの単位を直線上にとっていけば(abtragen)、「数ａに対応する点」と呼ぶに足る特定の終点ｐに至るのである（ちなみに有理数０には点ｏを対応させる)。こういうやり方で、どの有理数ａに対しても、つまりＲのどの個に対しても、[それぞれ]ただ一つの(ein und nur rein)点ｐが、つまりＬの上の一つの個が対応する。また二つの数ａとｂに二つの点ｐとｑがそれぞれ対応するとき、a>b ならばｐはｑの右側にある。[要するに]、本節の法則 I,II,III は、前節の法則 I,II,III に完全に対応しているのである。

§3　直線の連続性

ところがここに極めて重要な事実がある。それは、「直線Ｌの上には、いかなる有理数にも対応しない点が無数に存在する」という事実である。それは具体的にはこういうことである。[まず]点ｐが有理数ａに対応するなら、周知のように長さ op は、作図(Konstruktion)で使用された長さ一定である単位長(Längeneinheit)と通約可能(kommensurabel)である。つまり、これら二つの長さ[単位長と、op の長さ]がどちらもその何倍かになっているような、そのような第三の長さ、すなわちいわゆる公約単位(gemeinschaftliches Maß)が存在する。しかし古代ギリシア人がすでに知っており証明まで与えていたように、与えられた単位長と通約不可能な長さが存在する（たとえば一辺の長さ 1 である正方形の対角線の長さのように)。点ｏからこの直線上にこの長さをとると、どんな有理数にも対応しない端点を得る。さらに、単位長と通約不可能な長さが無限に存在することも容易に証明される。したがって次のように申し立てることができるだろう。すなわち、「直線Ｌ上に在る点の個たちと、有理数の領域 R に在る数の個たちとでは、前者の方が後者よりも無限に豊富(unendlich viel reicher)である」と。

さて仮に私が、直線上のすべての事象を算術的に処理しようと決心(will)しても、[いま見たように]有理数がその期待に応えない以上、その思いは願望(Wunsch)の域を出ない。だからこそ、有理数の創出によって[すでに]構成されたあの装置(Instrument)Ｒを、[さらに]新

たな数の創出によって本質的に精緻化することが喫緊の課題なのである。しかもこの[新しい]数の領域は、直線と同じ完全性を、つまり（すぐ後で使う言葉でいえば）直線と同じく連続性(Stetigkeit)を有していなければならない。

以上の考察は誰でも知っているありふれた内容であり、その繰り返しは無用ではないかと訝しく思う向きもあるだろう。しかしこのおさらいは、中心となる問いの立て方を適正化するために必要だったのである。従来の無理数の導入の仕方は、ただの一度も厳密に定義されたことのない[そして幾何学的直観と野合した]「外延量概念(Begriff der extensiven Größen)」なるものといわば結託しており、そのうえで、ある量を同種の別の量で測定した(Messung)最終結果(Resultat)として[無理]数は説かれてきた(erklåren)のである(注)。だがそうではなくて、私は、算術は[飽くまでも]自らの内部から自らを展開する（sich aus sich selbst heraus entwickeln）ものであってほしいと思う。非算術的なイメージとのこうした結託が、数概念の拡張の端緒(nächste Veranlassung)になったということは、一般論としてなら認めてもよいだろうが（ただし複素数の導入に際してこうしたことは毫もなかった)、だからと言ってそれは、算術や数関係の学問にこうした異質な考察を持ち込んで良いことの理由にはならない。負の有理数や分数の有理数が自律的な創出(freie Schöpfung)を通じて定立され、これらの数の計算法則がすべからく(müssen und können)正整数の計算法則に帰着させせられたように、無理数もまた有理数だけを頼りに完全に定義(definieren)されなければならない。ただそれをどう定義したものか、それが問題である。

（注）このやり方でどんな数でも漏れなく定義できると言われることがあるが、それが見せかけの長所であることは複素数の例を考えればすぐにわかる。しかも[本文の上記の]やり方は話が逆であって(umgekehrt)、私見では、あらかじめ無理数が導入されてこそ、同種の二つの量の比(Verhaeltnis)の概念も明確に展開できるのである。

いま有理数領域 R と直線を比較してみてわかったことは、有理数領域 R が不完全で空白だらけで不連続である一方で、線の方は完全で空白がなく連続とされていることである。では、線のこの連続性はいったい何に由来しているのだろうか。すべてはまさにこの問いの答えに含まれているはずであり、その答えがあらゆる(aller)連続的領域の研究の学問的な礎となるに違いない。「最小部分における中断なき連関（ununterbrochene Zusammenhang in der kleinsten Teilen)」とやらについての妄言は、当然のことながら何も生み出さない。というのは、求められているのは、具体的にそこから何かを演繹するための基礎の任に耐えるだけの、[連続性の]明確な特徴(Merkmal)だからである。長きにわたって虚しい考察を繰り返した結果、私はついに求めるものを発見した。おそらく人々はこの発見をあれこれ評定するのだろうが、大部分の人がこの発見の内容を極めて当たり前(sehr trivial)と受け取ることを、私は疑わない。私の発見とはこうである。前節[§2]で指摘したように、直

線のどの点 p も二つの部分への分解を線上に引き起こし、しかも片方の部分のどの点も、もう一つの部分のどの点よりも左側になるようにして、その分解を引き起こすということ。さて私は、いま[直線について述べたこと]の逆(Umkehrung)のなかに、すなわち[直線をめぐる]次の原理(Prinzip)のなかに、連続性の本質を読み取るのである。

「直線上のすべての点が二つのクラスに、それも第一のクラスの各点が第二のクラスの各点よりも左側に来るように、分裂するなら、二つのクラス(Klasse)へのすべての点のこの区分(Einteilung)を引き起こすような、そして二つの部分(Stücke)への直線のこの分割(Zerschneidung)を引き起こすような、一つのそしてただ一つの(ein und nur ein)点が存在する(existiert)。」

先ほど述べたように、誰もがこの申し立ての正しさを即座に認めると期待しても、あながち不当ではあるまい。まあ大多数の読者は、連続性の神秘がこんなたわいもないやり方で解明されたと聞いて、ひどく気落ちするのだろうが。この[誰もが認めるという]点について、私は次のことを言い添えておきたい。読者諸賢がこの原理をもっともだ(einleuhtend)と受け止められ、「それは線というものについて自分が抱くイメージによく一致する」とお認めいただけるなら、私はそれで満足である。なぜなら私であれ誰であれ、この原理の正しさを証明(Beweis)することなどできないからである。線のこの性質は[むしろ]公理(Axiom)として立てられている。それは、我々はこの公理があって初めて線に連続性を認めることができる(der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen)という意味、[いやそもそも]この公理があって初めて線について連続性を云々する気になる(die Stetigkeit in die Linie hineindenken)、という意味である。ここで話を広げよう(überhaupt)。もし空間が実在する存在(eine reale Existenz)だとしても、その空間が必然的に連続であるいわれはない。なぜなら空間が不連続でも、空間の無数の性質が今と同じまま、ということは考えられるからである。さらに、空間が不連続であることが確認されているにもかかわらず、誰かが、それでも連続的空間の方がいいというので、不連続空間の空白を頭の中なかで充填し(Ausfüllung)、それを連続的空間に変更しようとしても、この企てを妨げる理由はまったく見当たらない。[ことほど左様に、空間と連続性の関係に特段の縛りは掛かっていないのだが]、くだんの充填は点という名前を持つ新たな個の創出であり、[客観的にはいざ知らず、人間精神のする創出である限りにおいて] 充填は前述のあの原理の縛りを受けないでは済まないのである。

§4　無理数の創出

有理数の不連続領域 R を完全化するやり方は、[実は]すでに[前節の]結びの言葉によって

言い尽くされている。[しかしその議論に入る前に、この段落では分解(Zerlegung)を、ただし有理数を与えた分解を、§1を参考に振り返っておこう]。§1で見たように(III)、どの有理数aも、体系RをA_1とA_2という二つのクラスに、しかも第一のクラスA_1の各数a_1が第二のクラスA_2の各数a_2より小さくなるようにして、分解させていたのだった。ただし数aは クラスA_1の最大数か、クラスA_2の最小数となる。さて体系RがA_1とA_2という二つのクラスに区分け(Einteilung)されているとき、この区分けの「A_1の各数a_1はA_2の各数a_2より小さい」という特徴的な性質だけ(nur)に注目して、簡単のために「切断(Schnitt)」と呼び、(A_1,A_2)と表記することにする。そのとき、どの有理数 a も一つの切断を引き起こしていると言える訳である（正確には、本質的な差を認めがたい二つの切断を引き起こしていると言える)。さてこの切断は、[上記の特徴的な性質に]加えて(außerdem)、次の性質、すなわち、「第一の数のクラスの中に最大数が存在するか、第二の数のクラスの中に最小数が存在するか、そのいずれかである」という性質を[も]有していた。ところがこの[二つ目の]性質ではその逆(umgekehrt)が成立していたのだった。すなわち、ある切断が「第一の数のクラスの中に最大数を存在させるか、第二の数のクラスの中に最小数を存在させる」なら、まさにこの最大の有理数か最小の有理数のいずれかが、この切断を引き起こしていたのだった。[以上が§1のおさらいである。]

[ところが]すぐわかるように、[有理数領域 R の]切断には、有理数が引き起こしたのでない切断が、無数に(unendlich viel)存在する。手近な実例はこうである。

Dを整数の平方でない正の整数とする。そのとき次の式を満たす正の整数λが存在する。すなわち

$$\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$$

その平方がDより大きくなるすべての正の有理数a_2を第二のクラスA_2 とし、それ以外のすべての有理数a_1をクラスA_1とする。そのときこの区分は切断(A_1,A_2)である。つまりどんな数a_1をとっても、それはどの数a_2よりも小さい。a_1が＝０か負なら、数a_2は定義より正だから、すでに上の理由だけで、a_1はどの数a_2よりも小さい。しかしa_1が正なら、その平方は≦Dであり、したがってa_1はその平方が＞Dであるどの正の数a_2よりも小さい。

　ところがいかなる有理数も、この切断を引き起こしてはいない。その証明には、平方して＝Dになるような有理数が存在しないことの確認がとりあえず必要である。それは数論の初歩でよく知られているところだが、ここは次の間接証明の出番としよう。平方すると D になる数が存在すると仮定すると、$t^2-Du^2=0$を充たす二つの正整数 t と u も見つかる。この場合、uを、平方してからDを掛けるとある整数の平方になるような、そんな正整数のなかで最小の正整数と仮定しても差し支えない。このとき、明らかに

$$\lambda u < t < (\lambda+1)u$$

だから、数

$$u' = t - \lambda u$$

は、正の整数であり、しかもuより小さい正の整数である。そこでさらに

$$t' = Du - \lambda t$$ とおくと

t' も同様に正の整数となり、結局

$$(t')^2 - D(u')^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0$$

となるが、これはuについての[最小だという]前提に矛盾する。

ゆえに、どの有理数xの平方も、$<D$ か $>D$ のいずれかである。すぐ分かるように、クラスA_1に最大数はなくクラスA_2に最小数はない。

$y = x(x^2+3D)/(3x^2+D)$ とすると

$y - x = 2x(D-x^2)/(3x^2+D)$ であり

$y^2 - D = (x^2-D)^3/(3x^2+D)^2$ となる。

そこでxにクラスA_1の正数をとると、$x^2<D$ であり、したがって $y>x$ であり、$y^2<D$ となり、つまりyも A_1に属す。しかしxにクラスA_2の数をとると、$x^2>D$ であり、したがって $y<$ であり、$y>0$ で $y^2>D$ であり、ゆえにyもクラスA_2に属す。それゆえ、この切断を引き起こしているのは有理数ではない。

この性質、すなわち「[有理数の領域R の]切断は、全部が全部、有理数によって引き起こされている訳ではない」という性質に、すべての有理数の領域 R の不完全性つまり不連続性は起因している。

[そこでこうしよう]。有理数が引き起こしたのでない切断(A_1, A_2)に遭遇するたびに、我々は新しい数、すなわちこの切断(A_1, A_2)によって完全に確定されたと目される無理数(irrationale Zahl)αを創出(erschaffen)する。またそのとき我々は、「数αはこの切断に対応する」だとか、「この数が切断を引き起こした」などの言い方をする。そうすると今後(von jetzt ab)、どの特定の切断にも一つそしてただ一つの特定の(有理ないしは無理の)数が対応するだろう。また、[有理であれ無理であれ]二つの数が本質的に異なる切断に対応するとき、かならず(stets)、そしてそのときに限って、二つの数は異なる数、不等な数と見なされるだろう。[こうして数と切断の「対応関係」は原理的に確保された。ここから先は、有理数と無理数の体系における「順序関係」と「演算」を切断の視点から基礎づける作業に専念しよう]。

§5　実数の領域の連続性.

前節で[順序に関する]一連の区別[(i)(ii)(iii)(iv)(v)]が確立されたことによって、すべての実数の体系 $\mathfrak{R}$ は[有理数の体系 R には認められなかった(§1)]「一次元の順序づけられた領域(ein wohlgeordnetes Gebiet von einer Dimension)」になることができた。それはまさに、以下の[四つの]法則の支配が及んだことを意味する。[すなわち、α, β, γ を実数とすると、まずは]

(I) $\alpha>\beta$、$\beta>\gamma$ なら $\alpha>\gamma$ でもある。これを「数 β は数 α と数 γ の間にある」と言う。
(II) α と γ を異なる二数とすると、α と γ の間にはかならず互いに異なる無限に多くの β が存在する。
(III)特定の数 α をとると、体系 $\mathfrak{R}$ のすべての数は、それぞれ無限に多くの個を含む二つのクラス $\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ に分裂する。それは、第一のクラス $\mathfrak{A}_1$ が、$<\alpha$ であるような数 α_1 をすべて含み、第二のクラス $\mathfrak{A}_2$ が、$>\alpha$ であるような数 α_2 をすべて含むという意味である。ちなみに、数 α それ自体を第一と第二のクラスのどちらに入れるかは任意であり、それぞれに応じて α は第一クラスの最大数となるか、第二クラスの最小数となるかである。いずれにせよ、体系 $\mathfrak{R}$ が二つのクラス $\mathfrak{A}_1$、$\mathfrak{A}_2$ に分解した場合、第一のクラス $\mathfrak{A}_1$ の各数は第二のクラス $\mathfrak{A}_2$ の各数より小さくなっている。この場合、「数 a がこの分解を引き起こした」という言い方が行われる。

これら[三つ]の命題は前節[§4]の定義から直接に導くことができる。話を簡単にするため、そして読者を退屈させたくないので、証明は省略する。

しかし領域 $\mathfrak{R}$ はこれら以外に<u>連続性</u>(Stetigkeit)という性質を有している。すなわち次の命題が成立するのである。

(IV)すべての実数の体系 $\mathfrak{R}$ が二つのクラス $\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ に分裂し、しかもそれが、クラス $\mathfrak{A}_1$ の各数 α_1 がクラス $\mathfrak{A}_2$ の各数 α_2 より小さくなるような分裂だとすると、この分解を引き起こした、ひとつそしてただ一つの数 α (eine und nur eine Zahl α)が[体系 $\mathfrak{R}$ に]存在する。

<u>証明</u>

[すべての実数の体系] $\mathfrak{R}$ が $\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ に分解または切断された場合、同時に、すべての有理数の体系 R に切断(A_1, A_2)が生じている。しかもこの切断は、A_1 がクラス $\mathfrak{A}_1$ のすべての有理数を含み、A_2 が他のすべての、つまりクラス $\mathfrak{A}_2$ のすべての有理数を含むような、そのような切断である。この[有理数の体系] R の切断 (A_1、A_2)を引き起こす特定の数を α としよう。ここで α と異なる(verschieden)ある数 β をとると、α と β の間にはかならず無限に多くの有理数 c が存在する。そこでまず[第一に] $\beta<\alpha$ なら、[c は α と β の間にあるのだから]

$c<\alpha$であり、ゆえに c はクラス A_1 に属し、だから c は$\mathfrak{A}_1$にも属す。またさらに[c はαとβの間にある以上]$\beta<c$ だから、βも同じくクラス$\mathfrak{A}_1$に属している。なぜなら$\mathfrak{A}_2$のどの数も、$\mathfrak{A}_1$のどの c よりも大きいからである[換言すれば、仮にβが$\mathfrak{A}_2$に属すなら、$\beta>c$ となってしまうからである]。しかし他方[第二に]、$\beta>\alpha$なら、[c はαとβの間にあるのだから] $c>\alpha$であり、ゆえに c はクラス A_2 に属し、だから c はクラス$\mathfrak{A}_2$にも属す。またさらに[c はαとβの間にある以上]$\beta>c$ だから、βも同じクラス$\mathfrak{A}_2$に属している。なぜなら$\mathfrak{A}_1$のどの数も、$\mathfrak{A}_2$のどの c よりも小さいからである[換言すれば、仮にβが$\mathfrak{A}_1$に属すなら、$\beta<c$ となってしまうからである]。ゆえに[最終的に]、αと異なるどんな数βも、$\beta<\alpha$ならクラス$\mathfrak{A}_1$に、$\beta>\alpha$ならクラス$\mathfrak{A}_2$に属す。これはすなわち、α自体が$\mathfrak{A}_1$の最大数であるか、$\mathfrak{A}_2$の最小数であるか、そのいずれかであることを意味している。すなわちまさにαこそが、[単に R ではなく] $\mathfrak{R}$ をクラス$\mathfrak{A}_1$とクラス$\mathfrak{A}_2$に分裂せしめた当の数、しかも、一つ、そして確実にただ一つの数(eine und offenbar die einzige Zahl)なのである。しかしこれがまさに証明すべきことであった。

§6　実数の計算

二つの実数α,βの計算を有理数の計算に帰着させる上で肝要なことは、数α,βが[有理数の]体系 R に引き起こす切断(A_1, A_2)と(B_1, B_2)を使って、[二つの実数α,β]の計算結果γに対応すべき切断(C_1, C_2)を定義することである。ここではもっとも単純な例、つまり加算に限ってこのことを試みる。

c をある有理数とする。[第一に、実数αが引き起こす有理数の体系 R の切断の第一クラス]A_1 から数 a_1 を、また[実数βが引き起こす有理数の体系 R の切断の第一クラス]B_1 から b_1 をとることができて、しかも $a_1+b_1\geqq c$ が成り立つようにできるなら、この[有理数]c をクラス C_1 に含めることにし、それ以外の c はすべてクラス C_2 に含めることにする。そうすると、すべての有理数[c]は二つのクラス C_1、C_2 に区分されるが、それは当然、切断になっている。なぜなら C_1 のどの数 c_1 も、C_2 のどの数 c_2 よりも小さいからである。さて「第二に」二つの数α,βが[どちらも]有理数だとすると、C_1 のどの数 c_1 も$\leqq\alpha+\beta$である。なぜなら、$a_1\leqq\alpha$であり $b_1\leqq\beta$であり、ゆえに[c_1=]$a_1+b_1\leqq\alpha+\beta$も成り立つからである。そこで、さらにもし C_2 に含まれる数 c_2 が$<\alpha+\beta$だとすると、つまり p を正の有理数だとして$\alpha+\beta=c_2+p$ だとすると、

$$c_2=(\alpha-p/2)+(\beta-p/2)$$

となるが、$\alpha-p/2$ は A_1 に属す数であり、$\beta-p/2$ は B_1 に属す数であるから、これは数 c_2 の定義に矛盾する。したがって C_2 に含まれるどの数 c_2 も $c_2\geqq\alpha+\beta$である。ゆえにこの場合、切断(C_1, C_2)を引き起こしているのは和$\alpha+\beta$なのである。だから[第一であれ第二

であれ]いずれの場合においても、二つの任意の実数α, βの和(Summe)$\alpha+\beta$という言い方で切断(C_1, C_2)を引き起こす数γのことを考えても、 有理数の算術で妥当する[和の]定義に抵触しない。さらに[第三に]、二つの数α, βの一方だけが、例えばαだけが有理数だとしても、数αがクラスA_1に属そうが、クラスA_2に属そうが、それが和$\gamma=\alpha+\beta$に影響をおよぼさないことは容易に知られる。

加算以外のいわゆる初等算術の演算（すなわち差、積、商、冪、根、対数などの構築）も、加算同様の仕方で定義される。さらに、わたしが知る限りただの一度も証明されたことのない命題（たとえば $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$）の証明も、このやり方で実際に可能である。比較的込み入った演算の定義に冗長さ(Weitläufigkeit)はつきものだし、冗長さもまた物事の本質に根ざしてはいるのだが、しかしその大半は回避可能である。この[冗長性を回避するという]点で、区間(Intervall)の概念は非常に有効である。区間とはこうである。「a と a’を体系 A の数だとすると、a と a’の間(zwischen)のすべての有理数も体系 A に含まれる」という特徴的な性質を有するような、有理数の体系 A の概念が区間である。すべての有理数の体系 R は区間であり、各切断の二つのクラスも[それぞれ]区間である。しかし区間 A のどの数よりも小さい有理数a_1があり、区間 A のどの数よりも大きい有理数a_2があるなら、その A を有限区間(ein endliches Intervall)と呼ぶ。この場合、a_1と同じ特性を持つ無限に多くの数が存在し、a_2と同じ特性を持つ無限に多くの数が存在することは明らかである。またこの場合、全体領域 R は三つの部分A_1, A_2, A_3に分裂するが、そのとき完全に確定した数（有理または無理の）α_1とα_2が出現する。これを区間 A の下の限界(Grenze)（小さい方の限界）、上の限界（大きい方の限界）などと呼ぶ。下の限界α_1は、体系A_1から第一クラスができるときの切断で決まり、上の限界α_2は、体系A_2から第二クラスができるときの切断で決まる。α_1とα_2の間にあるどんな数(有理数であれ無理数であれ)についても、区間 A の中に(innerhalb)あるという言い方ができる。区間 A のすべての数が区間 B の数でもあるなら、A は B の部分であると言う。

有理数の算術の数え切れない多数の定理（たとえば$(a+b)c=ac+bc$のような）を任意の実数に移し替えようとすると、さらなる冗長さが見込まれるが、実はそうではない。すぐわかるように、全ては「算術的演算そのものに、ある連続性が備わっている」ということの立証にかかっているのであって、私はこの発言の真意を次の一般的命題を例にとって示したい。

「数α, β, γ…に関する計算の結果を数λとし、λが区間 L の中にあるとする。そのとき、数α, β, γ…をそれぞれ中に含む区間 A,B,C…があって、しかも数α, β, γ…を区間 A,B,C…の任意の数に置き換えた計算の結果も、かならず区間 L の中の数になる」。この命題の陳述のうんざりするようなまだるっこさを思えば、言語を補佐する何ものかの召喚がここで不可欠なことは言うまでもあるまい。その役割を完全に果たすのは、変量

(veränderliche Größe) 、関数(Functionen)、極限値(Grenzwerte)といった概念の導入であり、もっとも単純な演算の定義さえ、こうした諸概念で基礎付けることが目的に叶っている。だがここではこれ以上深入りすることはできない。

§7 無限小解析

ここで話の結びとして、ここまでの考察を無限小解析の若干の主要命題に関係づけてさらに説明しておくことが望ましい。

[すでに本稿で]こういうことが述べられている。個々の数値を順にとる変量 x を考えるとき、x が個々の数値をとるのに応じて、その間(zwischen)に［定数］ α を含むような二つの数の間に x が最後的に(definitive)含まれるのなら、あるいは同じことだが、0 でないどんな[小さな]値が与えられても、[そのたびに]差 $x-\alpha$ の絶対値がそれよりも小さくなるのなら、変量 x は特定の極限値 α に接近する(sich einem festen Grenzwert α nähert)、と。

[ところで無限小解析の]最重要命題の一つはこうである。「常に(beständig、単調に)増加はするが、すべての限界を超えて大きくなるのではない量 x は、ある極限値に接近する」。[いまからこの命題を前段の命題を使って証明しよう]。

私の証明はこうである。前提より、[どの x についても]つねに $x<\alpha_2$ が成り立つような α_2 がひとつ、したがって無限個存在する。このような数 α_2 の体系(System)を $\mathfrak{A}_2$ と表記し、それ以外の数 α_1 の体系を $\mathfrak{A}_1$ と表記する。さて体系 $\mathfrak{A}_1$ のどの数[α_1]であれ、いつかはある x が見つかって、$x\geqq\alpha_1$ となるだろう。ゆえにどんな数 α_1 も、どんな数 α_2 よりも小さい。したがってある数 α があって、それは $\mathfrak{A}_1$ の最大数か、$\mathfrak{A}_2$ の最小数になっている(§5,IV)。[しかし]x は増加をやめないのだから、前者はありえない。したがって α は $\mathfrak{A}_2$ の最小数である。どんな α_1 をとろうとも、そこから先ずっと(definitive、最後的に) $\alpha_1<x<\alpha$ となるような、そんな x がいつかは(schließlich)見つかる。しかしこれは x が極限値 α に近づくことを意味する。

この命題は連続性の原理と等価(äquivalent)である。すなわち領域 $\mathfrak{R}$ がたった一つの実数を失うだけでも、上記の命題は妥当性を失う。換言すれば、この命題が正し(richtig)ければ、§5 の命題 IV も正しい。

[さらに] 無限小解析には、この命題と等価でしかも使用頻度においてそれにまさる命題がある。それはこうである。「量 x が変化するとき、所与の任意の正数 δ に対して、「そこか

ら先は(von welcher ab)、 xの変化の仕方はδ未満にとどまる」と言えるような[xの]位置(Stelle)がその都度見つかるなら、xはある極限値に近づく。」

上の命題は、容易に証明できる命題、すなわち「ある極限値に近づく変量は、やがて、ある所与の正の量未満の変化しかしなくなる」という命題の逆（Umkehrung）に当たるが、それは先の命題[常に増加はするが、すべての限界を超えて大きくなるのではない量xは、ある極限値に接近する]から導くこともできるし、連続性の原理から直接導くこともできる。ここでは後者の道を採ろう。δを任意の正の量とすると(つまりδ＞0だとすると)、[前の段落の]仮定より、[xが変化するとき]そこから先はxの変化がδ未満にとどまるような瞬間が到来する。つまりxがこの瞬間に値αをとるなら、それ以後はずっと$x>\alpha-\delta$かつ$x<\alpha+\delta$となるというのである。さてここで[前の段落の]当初の仮定(die ursprüngliche Annahme)はしばらく脇に置くことにして、いま[三つ前の段落で]証明したばかりの「変数xが[ある値以後]とるすべての値は挙示可能な二つの有限値の間にある」という事実に専念しよう。この事実に立つとき、すべての実数は二通りの仕方で区分[切断]することができる。[第一の区分はこうである。xが] 変化を遂げるのに応じて最後的に(definitiv) $x\leqq\alpha_2$となるなら、数α_2（たとえば$\alpha+\delta$）は体系$\mathfrak{A}_2$に含めることにし、$\mathfrak{A}_2$に含まれないすべての数は体系$\mathfrak{A}_1$に含める。このとき、α_1を$\mathfrak{A}_2$に含まれない数だとすると、どれだけ変化のプロセスを前に進めても、なお無限回にわたって$x>\alpha_1$となるだろう。さて各数α_1は各数α_2よりも小さいのだから、[連続性の原理に照らして]体系 $\mathfrak{R}$ のこの切断($\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$)を引き起こす完全に確定した数αが存在する。この数αを、つねに有限であり続ける変数 xの、上の極限値(der obere Grenzwert)と名づけよう。同様にして[第二に]、変数xの挙動から、体系 $\mathfrak{R}$ の第二の切断($\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$)が生じる。すなわち変化を遂げるのに応じて最後的に数$x\geqq\beta_1$となるなら、数β_1（たとえば$\alpha-\delta$）は体系$\mathfrak{B}_1$に含めることにする。「決して最後的に$x\geqq\beta_2$とはならず、まださらに無限に頻繁に $x<\beta_2$となる」という性質を持つ他のβ_2は、体系$\mathfrak{B}_2$に含める。この切断を引き起こす数βを、変数xの下の極限値と名付ける。
さて両数α, βは明らかに次の性質によって特徴づけることもできる。すなわち、任意の小さい正の量をεとすると、必ず最後的に$x<\alpha+\varepsilon$かつ$x>\beta-\varepsilon$となるが、決して最後的に$x<\alpha-\varepsilon$となることはなく、最後的に$x>\beta+\varepsilon$となることもない、という性質がそれである。
さてそうだすると、二つの場合が考えられる。[第一の場合はこうである]。もしαとβが互いに異なるなら、$\alpha_2\geqq\beta_1$である以上、必然的にα＞βである。それは、変数x が振動する(oszillieren)ということ、つまりどこまでプロセスを進めても、εを任意の小さな正の量としたとき、変数xは、その総量が値$(\alpha-\beta)-2\varepsilon$を超えるような変動をかならず被るということである。ここで[一旦脇に置いた]当初の仮定に立ち返ると、上の結論はこの仮定と矛盾する。だからもう一つの[第二の]場合、すなわちα＝β以外は考えられない。さてすでに証明したように、正の量εがどんなに小さくても、かならず最後的に$x<\alpha+\varepsilon$および$x>\beta-\varepsilon$となる以上、xは極限値αに近づく。これが証明されるべきことであった。

連続性の原理と無限小解析の関係の説明としては、これらの実例で十分と考える。［完］