[翻訳]

ベルナルト・ボルツァーノ（Bernard Bolzano）：

『函数論草稿(Functionenlehre)』（推定 1830 年代前半）

[目次]

ただし以下は割愛した。「§67 から§83 まで（合成関数）」、「§115 から§118 まで（関数値の飛躍と空白）」、「§136 から最後まで（テイラー展開など）」。

[訳者前書] ベルナルト・ボルツァーノの『函数論草稿』は、「至るところ微分不可能な連続関数」の、数学史上もっともはやい実例を含んでいる。それに関わるのは、実質、この草稿の§111~§135 であるが、それに至るまでの議論の過程も、彼の数学観を窺い知る手掛かりになると判断し、併せて訳出した。訳文中の[　]で挟まれた文章は、すべて訳者による補足であり、原文にはない。原文のイタリックによる強調は下線で表現する。なお「草稿」ということもあり、少なからぬ節において段落が長大であり、それが内容の難解さと相まって、通読を極めて困難にしている。今回、訳者の判断で適宜、段落を分割したことを諒とされたい(2,4,13,28,37,38,39,43,45,46,48,49,51,56,60,65,66,84,95,96,97,98,104,105,107,109,121,122,124,131,134,135 の各節)。なお Function には「函数」の語を当てたが、古色溢れる(と私には見える)この表記が彼にふさわしいと考えたからである。

[底本] Bernard Bolzano Gesamtausgabe Bd.2A10/1 .Hrsg;Bob van Rootselaar,Frommann-Holzboog。2000.

（参考 1）Bernard Bolzano; Petr,Karel(others); Rychlik,Karel(others);*Bernard Bolzano's Schriften.Band 1.Functionenlehre.*(German).Praha.1930. （参考 2：英語訳)Russ,Steve; *The*

*Mathematical Works of Bernard Bolzano.*Oxford University Press.2004.

[注意] 英語版も指摘するように、Bolzano の議論には僅かながら数学的な間違いが含まれている。実数概念が不完全だったこと、一様収束を知らなかった等の事情があって、今日では正当と認められない推論が散見されるので、注意されたい。詳細については英語版の脚注に当たられよ。さらにこの草稿には、Bolzano が自らの他の草稿の参照を促す表記が含まれるが、表記は不完全であり、場所の完全確定に至らない。英語版の推定に追随して、草稿、”Reine Zahlenlehre”（純粋数論）”の”Siebenter Abschnitt.Unendliche Größenbegriffe” の箇所を挙げる。訳文中の十数個に及ぶ「RZ7.§92」などの表記がそれである。

B・ボルツァーノ:『函数論(Functionenlehre)』草稿
(推定 1830 年代前半)

(序文)　変数と変数の関係

[変数と函数の依存関係とその規則(Regel)]

§1　[函数研究の意義]

【次の話題へ(Übergang)】　私はここまで、ある変数が他の一つまたは複数の変数によって決定される仕方をさまざまに調べてきたが、決定する側の変数のすべてまたは一部が変化(Veränderung)するのに応じて、決定される側の数がどんな変化をきたすのか、という問題には触れてこなかった。だがこの問題の研究が注目すべき真理をもたらすこと、函数の本質をより詳しく知る手掛かりを与えることは想像にかたくない。なぜなら、変数が増加ないしは減少するのに応じて、その変数によって決定される函数[値]がこうむる増加ないしは減少のあり方においてこそ、函数固有の性質をうかがい知ることができる筈だからである。ここまでの準備によって研究の体勢は十分に整った。今こそ我々はこの研究に着手しなければならない。

§2　[第一種関数と第二種函数]

【定義(Erklärung)】　[複数個の]数(Zahl)とそれによって決定される[一つの]数がある場合、前者が[それぞれ]変化するとき後者がこうむる変化を考究するに当たっては、その依存関係(Abhängigkeit)が次のどちらに属すのかを見極めておくことが肝要である。依存関係には二種類あって、決定する側の自由[諸]変数の値と決定される側の数値を繋ぐ法則(Gesetz)が、自由[諸]変数の<u>特定の値に言及しない</u>のが第一種である。つまり、[決定する

側の］自由［諸］変数と決定される側の数があり、前者すなわち自由［諸］変数の値のいかんにかかわらず後者を決めるような、そのような一つの規則（eine Regel）が与えられているのが第一種の依存関係である。しかしそうではないとき、つまり関連する一群の自由［諸］変数のクラスからそれに対応する一群の函数［値］のクラスを、自由変数のどの値についても一定不変の仕方で導くような法則が不在なら、そこには第二種の依存関係が生じている。［訳者。原文の段落が長大なので、ここで段落を改めることを了承されたい。］

第一種の依存関係の実例（Beyspiel）を数 W という形で挙げてみよう。数 W が変数 x, y, z に依存し、x には 2、y には 5、z には 4 を掛け、これらの積を加算して W=2x+5y+4z とすると、変数 x, y, z の値［の個々の組み］に対して、それぞれ［W の］適切な値が決まるが、これは第一種の依存関係の例である。ここにあるのは x , y, z による W の決定の一規則である。［なぜなら］そこには数 x , y, z の特定の値への言及が見られず、規則は x , y, z のどんな値についても普遍的に（allgemein）妥当しているからである。これに対して第二種の規定関係はたとえばこうである。標的射撃で射手の技量に応じて射手に賞金を与えるものとする。真ん中に当たれば 100 ターレルを与える［ターレルは貨幣単位］。真ん中からの外れ方を x ツォルとして［ツォルは長さの単位］、x が 2 ツォルを超えないなら射手には 100—25x ターレルを与えるが、外れ方が >2 ツォルかつ <5 ツォルなら 58－2x^2 ターレルを与える、云々。この場合、W は、x の特定の値を持ち出さなければ表現できない法則に従って、x によって規定されている。具体的にいうと、x=0 から x=2 までは W＝100－25x という方程式が当てはまり、x=2 から x=3 までは W=58－2x^2 という方程式が当てはまる、というようにである。第一種の函数については、普通、「函数は変数のすべての値にわたって同内容の陳述をするただ一つの法則（einzige gleichlautende Gesetz）に従う」と言われ、第二種の函数については、普通、「函数は変数の値が違うごとに別の内容の陳述をする諸法則（verschieden lautende Gesetze）に従う」と言われる。本書では、全部が全部ではないが、概ね第一種の函数のみを扱う。
［訳者。この節の内容は特に問題ないように見えるが、実は不可解なところがある。節の末尾には、「本書では、全部が全部ではないが、概ね第一種の函数のみを扱う」とあるが、実際のところ本書で重要な役割を果たすのは、§101 以後を見れば明らかなように「第二種の関数」だからである。］

§3　［第一種函数の正確な説明（規則）］

【注解（Anmerkung）】　次の点に注意してほしい。私が上の定義で言った内容はこういうことである。「函数が第二種に属すのは次の場合に限られる。すなわち函数の値を、函数の諸変数の特定の値とまったく独立なただ一つの（ein einziges）法則によって決定することが不可能なら（nicht möglich）、したがって普遍的に陳述する（allgemein lautend）一つの法則で函数の値を決定することが不可能なら、そのときに限って函数は第二種である。しかし［たとえ見かけ上］諸変数の個別の（besondere）値たちについて個別的に陳述する

(besonders lautend)形をとってはいても 、函数の値の決定のためのある諸法則を示すことさえ可能なら(nur möglich)、そのときその函数は第二種とは限らない」。なぜならいま述べたようなこと[諸変数の個別の値たちについて個別に陳述すること]は、[第二種に限らず]（第一種も含めて）すべての函数について[押し並べて]ありうることだからである。実際、普遍的に陳述する法則が成り立っているとき[でも]、その法則を、異なる値に対して異なる陳述をするいくつかの法則(auch mehrere für verschiedene Werthe verschieden lautende Gesetze)に書き換える(ausdenken)ことはできる。たとえば、[第一種の函数]W=3x を、「W は x=1 に対して数 3 に等しく、<3 のすべての値に対しては方程式 W=6x/2 によって決定され、>3 のすべての値に対しては方程式 W=12x/4 で決定される」という具合に[特定的に]定義することも、やろうと思えばやれる(könnten)のである。

[解析学の基本事項]

§4　[変化分(Veränderung)と差分(Differenz)]

【注解】　ある数表象 x（いわゆる変数）について人々が思い浮かべる複数個（場合によっては無限個）の値のなかから、一つの値たとえば x_1 を選び、それが x の別の値たとえば x_2 になるためには x_1 にいくら加えたり引いたりしなければならないかを考える。この場合、値 x_1 を基準値(zu Grunde gelegte Werth)、本来の値、中心の値などと呼び、それと対比される値 x_2 を変更値(geänderte Werthe)と呼ぶ。さらに、x_2 を得るために x_1 に加えられる数（自然数であれそれ以外であれ）を変化分(Veränderung)と呼ぶ。変化分については増加分(Zuwachs)や増分(Increment)という名称もあるが、もっとも一般的な呼び名は x_1 の差分(Differenz)であり、Δx_1 と表記する。x の基準値を単に x で表すように、変更値 x'を得るために x に加算しなければならない変化分も単に Δx と表記する。

複数の記号で合成されている数の変化分を表現するには、話を明確にするためにその記号はカッコに入れる。[たとえば] 数 xy がこうむる増加分は $\Delta(xy)$で表す。複数の変数 x,y,z,・・・によって決まる W=F(x,y,z,・・・)が、一変数 x の変化によってこうむる増加分（適切には変化分）は、$\Delta_x W$ または $\Delta_x F(x,y,z,\cdots)$で表す。この場合、$\Delta_x F(x,y,z,\cdots)$は、$F(x+\Delta x, y, z,\cdots) - F(x, y, z,\cdots)$という 差（Unterscied)を意味し、$\Delta_y F(x,y,z,\cdots)$は $F(x, y+\Delta y, z, \cdots) - F(x, y, z, \cdots)$という差を意味する。 さらに x と y が変化するとき W がこうむる差は $\Delta_{xy} F(x, y, z, \cdots)$と表記する。云々。

§5　[二変数の差分]

【注解】　したがって、 6－4 のような、二つの与えられた数の差分 (Differenz)と、$\Delta x_1 = x_2 - x_1$ のような、二つの変数の差分(Differenz)は別ものである。なぜなら、たとえば x が

自由変数だとすると、x_1 も x_2 もそれぞれ任意の自然数あるいは自然数以外の値をとることができ、したがって Δx_1 も任意の値をとることができるが、二つの所与の数の差分はつねに一定不変だからである。

§6

【補題(Zusatz)】　変数 x がとる値の差分は、互いに比較される二つの数（元の数と変更後の数）の性質によって、現実の数(eine wirkliche Zahl)であったり虚の数（eine blos eingebildete Zahl）であったりする。変数 x が関わる単位（1,Einheit）が、対立を受け入れる単位(eine des Gegensatzes fähige Einheit)であるなら、上記の差分は正であったり負であったりする。だから、元の数の値が x=6 で変更値が=10 なら、差分は $\Delta x=10-6=4$ である。元の値が=6 のままで、変更値だけが=3 になったとき、差分は引き算によって $3-6=-3$ である。変更値 x_2 と元の値 x_1 がたまたま等しいなら、Δx のイメージ(Vorstellung)は $\Delta x=x_2-x_1$ つまり 0 であり、したがってこの差分は対象を欠く(gegenstandlos)。

§7　[$x+\Delta x$]

【補題】　x が基準値、Δx が変化分だとすると、変更値は $=x+\Delta x$ である。

§8　[$W+\Delta W$]

【補題】　変数 W が変数 x, y, z によって決まるとし、W＝F（x、y、z、）とおく。基準値 x, y, z・・・に値 W が対応し、変更値 $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$・・・に値 $W+\Delta W$ が対応するなら、

$W+\Delta W=F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \cdots)$ であり、したがって

$\Delta W= F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \cdots)-F(x, y, z, \cdots)$ である。

§9　[$\Delta_{xy}F(x,y)$ や $\Delta_{xyz}F(x,y,z)$]

【補題】　さらにこうである。$\Delta_{xy}F(x,y)= F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)= F(x+\Delta x, y)-F(x,y)+F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x+\Delta x, y)=\Delta_xF(x,y)+\Delta_yF(x+\Delta x,y)$。また同様にこうである。

$\Delta_{xyz}F(x,y,z)= F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-F(x,y,z)=F(x+\Delta x, y, z)-F(x,y,z)+F(x+\Delta x, y+\Delta y, z)-F(x+\Delta x, y, z)+F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-F(x+\Delta x, y+\Delta y, z)=$
$\Delta_xF(x,y,z)+\Delta_yF(x+\Delta x, y, z)+\Delta_zF(x+\Delta x, y+\Delta y, z.)$　云々。

§10　[増加分も函数である]

【定理(Lehrsatz）】　一般に複数の変数 x, y, z の函数 W について、その増加分はやはり変数 x, y, z の函数である。x, y, z の増加分 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ もやはり変数 x, y, z の函数である。ただし場合によっては、これらの増加分が変数 x, y, z のどれかからまったく独立のことも

ありうる。
（証明）　省略

§11　　[一価性]
【定理】　ある函数 $W=F(x, y, z,\cdots)$が、それの変数のすべての値について、あるいは値 x と $x+\Delta x$: y と $y+\Delta y$: z と $z+\Delta z$:・・・を含む変数のすべての値について一価(einförmig)なら、ΔW も一価である。
（証明）　省略

§12　[多価性]
【補題】　逆に $W=F(x,y,z,\cdots)$が多価(mehrförmig)でも、ΔW は多価とは限らない。

§13　[m 階の差分]
【注解】　一変数あるいは多変数$(x,y,z,\cdots)$の函数 W の差分(Differenz)は、大半の場合、やはり[函数 W 同様] 依存関係によって決まる数(abhangige Zahl)であり、函数 W 同様に、変数 $x, y, z,\cdots$に依存し、加えてその変化分 $\Delta x, \Delta y, \Delta z,\cdots$にも依存する。そこで、これらの変数 $x_1,y_1,z_1,\cdots\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1,\cdots$の値を基準値と考え、別の $x_2,y_2,z_2,\cdots\Delta x_2, \Delta y_2, \Delta z_2,\cdots$の値を変更値と考えるとき、新しい函数 ΔW がこうむる変化分はどんな特性を持つだろうか。

この変化分、すなわち W の差分の差分(Differenz der Differenz)は W の二階の差分であり、先ほど扱った W の元の差分はそれとの関係で一階の差分と呼ばれる。同様にして三階、四階、一般に m 階の差分も考えることがでる。これらの差分を　Δ^2W, Δ^3W, $\Delta^4W\cdots\cdots$ Δ^mW と表記する。

§14　[差分の差分]
【定理】　n と m の任意の値について、$\Delta^n(\Delta^m x)=\Delta^{n+m}x$. である。
（証明）　省略　[数学的帰納法が使われている。]

§15　[一価性]
【定理】　一変数あるいは多変数$(x, y, z,\cdots)$の函数 $W=F(x, y, z,\cdots)$が一価なら、それから導かれるすべての[高階の]差分も一価である。
（証明）省略

§16　　[高階の和分]
【定義】　函数 W があって、$x, y, z,\cdots$の値が $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z,\cdots$に移行したときの[W の]変化分が、ちょうど、$x, y, z,\cdots\Delta x, \Delta y, \Delta z,\cdots$のある函数 $\phi(x,y,z,\cdots$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots$)に等しいとする。そのときWを、「函数$\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$の<u>和分(Summe)</u>」、正確には「函数$\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$の<u>一階の和分</u>」と呼ぶ。それに対して、変数x, y, z,・・・の函数Wが、ちょうど、まずx, y, z,・・・が、さらにx, y, z,・・・に加えて$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots$が、さらにそれに加えて・・・という具合に変化したとき現れる(一階ならぬ)<u>二階</u>、<u>三階</u>あるいは<u>m階の差分</u>が、それぞれある函数$\phi(x, y, z, \cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$に等しいなら、Wを$\phi(x, y, z, \cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$の<u>二階</u>、<u>三階</u>あるいは<u>m階の和分</u>と呼び、次のように表記する。

$\Sigma\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$.

$\Sigma\Sigma\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$.ないしは $\Sigma^2\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$.

$\Sigma^3\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$.　そして一般に

$\Sigma^m\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$.

§17　[総体と函数]

【注解】　[和分は和分でも]、先の§で説明したような「与えられた数」と「与えられた数」の「和分」と、ここで説明したような「差分(Differenz)である数表現」と「差分である数表現」の「和分」は、きちんと区別しなければならない。前者は、部分間の順序を顧慮しない、諸部分の総体(Inbegriff)であり、しかも部分の部分が[自動的に]全体の部分とみなされるような意味での総体である。だが後者の和分は函数(Function)なのである。

§18　[和分の和分]

【定理】　一般に次のことが成り立つ。　$\Sigma^m\Sigma^n\phi=\Sigma^{m+n}\phi$

（証明）　§14の証明と同様である。

§19

【定理】　同じ差分を持つ函数で、定数Cだけが異なる無数の函数が存在することについてに議論が行われている{省略}.

§20　[和分の一般化]

【補題】　[先に、函数$W=\Phi(x,y,z,\cdots)$が存在し、x,y,z,・・・が$x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \cdots$に移行することによって差分$\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$が生まれる場合を考えたが]、もしも、x,y,z,・・・が$x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \cdots$に移行したとき差分$\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$を生み出すような、x,y,z,・・・の函数$W=\Phi(x,y,z,\cdots)$が存在(bestehen)しないなら、そのとき表象 $\Sigma\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$ は対象を欠き(gegenstandlos)、ゆえに$\Delta\Sigma\phi(x,y,z,\cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$も対象を欠くことになるだろう。ちょうど、$x-y$ や x/y が対象を欠くなら、$(x-y)+y$ や $y(x/y)$ も対象を欠くようにである。しかし差と商の通常の意味を拡張(Erweiterung)し、一般的に方程式 $(x-y)+y=x$ や 方程式 $y(x/y)=x$

を設定して差し支えなかったように、ここでも類似の仕方で概念を拡張して、一般に、 $\Delta \Sigma \phi(x, y, z, \cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots) = \phi(x, y, z, \cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots)$が成り立つものとする。

§21　[差分と和分]

【補題】　このとき同様にして、ϕが何であれ、一般に、$\Delta^{m}\Sigma^{m+n}\phi = \Sigma^{n}\phi$　である。

§22

【補題】　§19 の定理の補足[省略].

§23

【定理】　複数の（変数もしくは定数の）代数和であるような函数の、その差分は、個々の可変な項たち(Summanden)の差分の、その代数和からなる。[証明は省略する]

§24　[定数の差分]

【補題】　定数の差分は =0 である。

§25

【補題】　数 x,y,z・・・はかならずしも自由(frey)な変数ではないのだから、数 x,y,z は[それぞれが]一つまたは複数の変数の関数でありうる。そこで前の定理[§23]よれば、我々はそれ自体、他の諸函数の代数的和分である函数については、これらの諸函数の差分を見つけることによって、それの差分を見つけることができる。

§26　[項が無限個の場合]

【補題】　+と−の記号で繋がった諸項の集まり(Menge)が無限個であっても、先の定理[§23]の定式(Formel)は妥当性を失わない。

§27　[限りなく小さくなる]

【補題】　変項(veränderliche Gliederm) x, y, z・・・の集まり(Menge)が有限個(endlich)であるとする。その個数を変えないという前提で、個々の増加分 $\Delta x, \Delta y, \Delta z \cdots$ がすべて限りなく小さくなる(ins Unendliche abnehmen)ことができるなら、§23 ゆえに、差分 ΔW も限りなく小さくなることができる。

§28　[積の差分]

【定理】　ある可測な(meßbar)定数と、変化はしてもつねに可測値をとる変数の、積を考える。この積である函数の差分は、定数と、変数の差分の、積である。

（証明）定数を a、変数を x とする。そのとき、この函数は ax ないしは xa である。さて a と x が可測数だというのだから、[W=]ax=xa である。

さらに［§8 ゆえに］$W+\Delta W=a(x+\Delta x)$ である。しかし、x のみならず $x+\Delta x$ も可測だというのだから、Δx もまた可測でなければならない。ゆえにこの表現［$a(x+\Delta x)$］は $ax+a\Delta x$ と展開でき、引き算して[つまり $W+\Delta W=ax+a\Delta x$ から $W=ax$ を辺々引いて] $\Delta W=a\Delta x$ を得る。

［訳者。「可測(meßbar)」という言葉は§39 にも登場し、そこでは値が「無限大にも虚(imaginär)にもならない」の意味で使用されている。］

§29　［限りなく小さくなる］

【補題】　Δx が限りなく小さくなるとき(in das Unendliche abnehmen)、ΔW も限りなく小さくなる[RZ7. §37]。

§30

【補題】　a が 0 でさえなければ、[§28 と]同様にして、商 x/a の差分(Differenz)は＝$\Delta x/a$ である。なぜなら、a が 0 でないという前提のもとで $x/a=x(1/a)$であり、そして 1/a は可測だからである。

§31　［積の差分］

【定理】　二変数の積である函数について、その差分は、変数にもう一つの変数の差分を掛けることを両方について行い、[両者を加算したうえで]それに二つの差分自体の積を加算すれば求まる。

（証明）変数が二つなので $W=xy$ とする。$W+\Delta W=(x+\Delta x)(y+\Delta y)$である。$x, y, \Delta x, \Delta y$ は可測数だから、$W+\Delta W=(x+\Delta x)(y+\Delta y)=xy+y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$ と分解される。引き算すれば、求める差分は、$\Delta W=\Delta(xy)=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$ である。

§32　［三変数の積の差分］

【補題】　所与の関数が三つの可変な因数の積 $W=xyz$ だとする。二つの因数の積 yz を一つの因数 u と見なせば、前節の式より　$\Delta W=u\Delta x+x\Delta u+\Delta x\Delta u$ である。そこで u に yz を代入すると、前節より、$\Delta u=\Delta(yz)$は $y\Delta z+z\Delta y+\Delta y\Delta z$ だから、$\Delta W=\Delta(xyz)=yz\Delta x+x(y\Delta z+z\Delta y+\Delta y\Delta z)+\Delta x(y\Delta z+z\Delta y+\Delta y\Delta z)$ あるいは$\Delta(xyz)=yz\Delta x+xz\Delta y+xy\Delta z+z\Delta x\Delta y+y\Delta x\Delta z+x\Delta y\Delta z+\Delta x\Delta y\Delta z$　である。

§33　［任意の個数の変数の積の差分］

【補題】　容易に知られるように、この演算は任意の数の変数の積に拡張できる。

§34

【補題】　　積 xyz の各因数の増分 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が、個数を変じることなく、それぞれ限りなく小さくなるとき、$\Delta(xyz)$も限りなく小さくなる。たとえば因数が二つだとすると、Δx と Δy が限りなく小さくなるとき、$\Delta(xy)=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$ も明らかに限りなく小さくなる(§31)。しかし n 個の因数の積についての定理が妥当するなら、それは n+1 個の因数の積にも妥当する。なぜなら、一つの因数を x とし、他の n 個の因数の積を y とすると、Δx と Δy が限りなく小さくなるとき、全部の積 W=xy は、上述の事情ゆえに限りなく小さくなるからである。

§35　［商の差分］

【定理】　　分子と分母がいずれも変数で、さらにどちらもつねに加測数で、しかも分母が 0 にならないとする。この商の差分は次のようにして求まる。分母 y に分子 x の差分 Δx を乗じ、また分子 x に分母 y の差分を乗じ、前者の積[つまり $y\Delta x$]から後者の積[つまり $x\Delta y$]を引き、その結果を、分母 y とその差分 Δy の和に分母 y を乗じたもの、すなわち $y(y+\Delta y)$で割れば良い。

（証明）省略

§36

【補題】　　x の増加分と y の増加分が限りなく小さくなるとき、y=0 でない限り、$\Delta\left(\frac{x}{y}\right)$も限りなく小さくなる。なぜならこの条件下で、$\frac{(y\Delta x-x\Delta y)}{y(y+\Delta y)}$ は限りなく小さくなるからである。

第一部　連続函数と不連続函数

[至るところで不連続な函数への注意喚起]

§37　　[函数概念の自由性]

【次の話題へ】　序文の§29、§34、§36 で見たように、函数の諸変数の差分が限りなく小さくなるとき、[当の]函数の差分も限りなく小さくなるような、そんな函数が存在する。先に挙げた一連の函数がその実例であって、そこではまさにこのことが、すべての任意の（ただし可測な）変数値について起こっているのである。しかし序文の§36 に掲げた函数は、分母=0 の場合、上の規則の例外になっている。なぜなら$\Delta(x/y) = \Delta(x/0) = (x+\Delta x)/(0+\Delta y) - x/0$ は、無限に大きい負量(eine negative unendliche große Zahl)を表すからである。

[さて]人間には、ある数が別の数に依存する法則(Gesetz)を自由に考えることが許されている。だから次の条件が成り立たないようなかたちで、値が他の数[x]の値に依存する数 W を考えることも許されている筈である。すなわち、「Δxが限りなく小さくなるとき差分 ΔW も限りなく小さくなるという性質(Eigenschaft)が、x の数個の値において不成立であるに止まらず、x のすべての値に対して不成立であるような」、そんな数[w]を考えることもできる筈である。

その第一のケースは、[すべての x について]、Δxが限りなく(**in das Unendliche**)小さくなる過程でΔx が[順次]とる値のなかに、ΔW を可測にしない値がいくつか含まれている場合である。

その第二のケースは、[すべての x について、そもそも]このΔW が限りなく小さくならない場合である。たとえばこういう場合がある。$(2m+1)/2^n$ という形を持つすべての x の値に対しては W=ax 、それ以外の値に対しては W=ax+b となる数 W を考える。この場合、$(2m+1)/2^n$ という形を持たない x の値に対しては、この形($2m+1)/2^n$ を持つ[別の] x であって、しかも差分Δxが、与えられたどんな 1/N よりも小さくなるような x の別の値が見つかる。そこですぐわかるように、どんな x をとっても、またΔxをどんなに小さくとっても、[そのとき]さらに小さなΔxがとれて、それに対応する ΔW が =aΔx+b　または=aΔx−b となり、結局、ΔW は限りなく小さくなることができないのである。

函数の挙動のこの食い違いは非常に重要であり、それを表す特別の術語を導入するのが相応しいと思われる。

[訳者。本節と次の 38 節、39 節は、いずれも一段落で一気に書かれており、内容が圧縮さ

れ難解なので複数の段落に分けて訳出した]。

§38　「連続的に変化する」と「不連続に変化する」の定義

【定義】　一つまたは複数の変数を持つ一価(einförmig)の函数 Fx について、その変数 x が一定値 x から変更値 x+Δx まで移行するときの[函数の]変化分を考えよう。Δx が限りなく小さくなるとき、[函数の]この変化分も限りなく小さくなるなら、「Fx は値 x において連続的に変化している(stetig verändern)」と言う。つまり値 Fx は可測とし、F(x+ Δx) も差分Δx のある値から初めてそれより小さい値にわたって可測とし、しかも差 F(x+ Δx)―Fx の絶対値(absolute Werthe)も、Δx を十分小さく取りさらにそれを小さくとるということを続ければ、任意の商 1/N より小さくなり、かつ小さく留める(verbleiben)ことができるなら、「Fx は値 x において連続的に変化している」と言う。

Δx の正の値についてこのことが成り立つなら、Fx は正の増加分または正方向の増加分について連続的に変化すると言い、Δx の負の値についてそれが成り立つなら、負の増加分または負方向の増加分について連続的に変化すると言う。そのことが x の正と負の[両方の]増加について成り立つなら、端的に「Fx は x で連続(stetig)である」と言い、誤解を避けたいときに限って「Fx は正の増加分と負の増加分において連続である」と言う。

以上に含まれない場合は、[それぞれ]「函数 Fx は、正のΔx について、負のΔx について、あるいは両方について、連続性の法則(das Gesetz der Stetigkeit)を毀損(verletzten)している」、あるいは「不連続である(unstetig)」、「突然(plötzlich)変化している」などと言う。

Δx が正にせよ負にせよ限りなく小さくなったとき、F(a+ Δx)－Fa という形のすべての差が>1 /N であり続けたために、X=a において連続性が毀損されている場合、「函数 Fx は x=a で飛躍(Sprung)している」と言う。

函数が変数 x=a で可測な値を持たないゆえに連続性が毀損されている場合、「函数 Fx はこの変数値について空白(Lücke)である」と言う。

§39　[同時代の数学者たちの連続性概念を論評する]

【注解】　我々はいま連続性の概念に取り組んでいる訳だが、この概念の本質的な部分はすでに他の人々によって確定されているのである。例えば Klügel の Wörterbuche (Art.stetig)や、Cauchy(Cours d'Algèbre,Ch.2. §2)や、Ohm(Analysis.Bd.2.§456)がそうである。[ただ] 他の点ではとても正確な Ohm を始め、彼らのうちのある者が、「変化分 F(x+ Δx) –Fx は、その絶対値において、所与の量 D よりも小さくならねばならず、Δx を小さく取ればますます小さくならなければならない(F(x+ Δx) –Fx･･･um so kleiner werden musse,je kleiner man Δx nimmt)」という言い方をするとき、それは誤解のなせる技と言わざるを得ない。というのは、彼らが実際求めているのは、「Δx がさらに小さくなったとき、F(x+ Δx)―Fx＜D となり、そしてそのままであり続け(verbleiben)なければならない」ということだからである。[しかし]Δx がもっと小さくなったとき、F(x+ Δx)–Fx がその度に小

さくなることが、［すべての変数にわたって］普遍的に連続性が認められる函数でかならず起こっているかというと、そうとは言えない。例えば $x^2\sin(\log x)$では差分 $F(x+\Delta x)-Fx$ が $x=0$ で（$\Delta x)^2\sin(\log \Delta x)$になるが、小さい$\Delta x$ をさらに小さくするとき、あの差がふたたび大きくなることがあり得るからである。

Kästner（Höhere Mechanik.2.Aufl.,5.Abschn., § 183 ff）や宮廷顧問官 Fries 氏(Naturphilosophie. §50)のような幾多の高名な数学者は、函数 Fx の連続性を、「ある値 Fa から別の値 Fb に移行するとき、その間のすべての値をかならず取る」という特性として説いている。しかしやがて見るように、この説明はあまりにも茫漠としているので、そこから上に述べたのと等価な[連続の]概念を導こうとしても無理である。

Eytelwein (*Höhere Analysis*.. Bd.1.§16)の定義は独自のものである。すなわち、「函数が連続であるとは、函数がその変数のある限界の間で(innerhalb gewisser Grenzen)とるすべての値が実(reell)でしかも有限であることであり、函数が不連続であるとはそのうちの一つまたは若干が無限大か不可能なときである」と。[だが]この定義をとる限り、我々は通常の言い方に逆らって、「一つ前の§で導入した函数、すなわち x が $2m+1/2^n$ という形を持つか持たないかに応じて、その値がつねに＝ax または=ax+b であるような函数」、も連続と認めざるを得ないだろう。Eytelwein 氏があの定義を語るにあたって、従来から使用されている代数記号で表現できるありふれた函数を念頭に置いていることは明白である。この函数が無限にならず imaginär にもならない(したがって可測であり続ける）その限界の間で、これらの函数が連続であるのは当然である。しかしそのような関数のなかでも、例えばいわゆる超越函数(trantzendenten Functionen)の場合にいま述べたようなことが成り立つとすれば、それは、この[超越函数の]概念の設定に際して「連続性の法則に従って変化する」ということを、あらかじめ（暗黙のうちに）組み込んでおくときに限るのであり、このことについてはいずれ適当な場所で明確に示そうと思う。

Lacroix は連続の概念をずっと狭くとらえているようであって（Traité élémentaire de calcul diff. et int. §.60))、彼は連続性の本質を、$\Delta Fx/\Delta x$ という比が極限値(Grenze)を持つという（彼の考えでは）函数の普遍的な特性に求めている。非常に多くの（ただしすべてではない)函数がこの特性を持つので、それに特定の名前を与えるのは悪いことではない。しかし前の§で説明した[連続性の]特性も特定の命名に値するし、しかもこれらの特性は互いに異なるだけではなく、分離することも可能である。なぜなら Lacroix 氏のいう連続性がなくても、前述の連続性は存在できるからである[訳者。これは「微分不可能な連続関数」の存在の指摘に当たる]。この場合は、Lagrange, Cauchy やその他の人々が導入した用語法に従うのが筋だろう。すなわち函数の連続性(Stetigkeit)は一つ前の§で説明した性質として理解し、［他方］商$\Delta Fx/\Delta x$ がΔx と独立なある限界(Grenze)に限りなく近づく(in das Unendliche nahen)とき、「函数 Fx は導函数(eine abgeleitete Function. une function dérivée)を持つ」という言い方をすることにしよう。さらに指摘しておきたいのは、滅多に起こらない状況、たとえば一方向すなわち正の増加分についてだけ連続とか、負の増加分についてだ

け連続とかいう状況は、先の定義では無視しただけではなく、応用においてもまず出会うことはない（と私は思う。）

[連続性と不連続性に関する注意事項]

§40　[定数値は連続函数である]

【定理】　変数 x から完全に独立な数 W を考えよう。たとえば W の概念(Begriff)のなかに x が登場しない場合がそうであり、[よしんば]そこに x が登場しても、その x が W の値を変えない場合もそうである（たとえば a,b,c が x に依存しない定数で、W=(ax−bx)/cx の場合)。こうした[定]数 W も連続と、しかも x の任意の値において、しかも両方向について、連続と考えることができる。

（証明）　x に対する W の値を Fx、x＋Δx に対する W の値を F(x+ Δx)とおくと、Fx =F(x+ Δx)したがって F(x+ Δx) − Fx = 0 とならざるを得ない。ところが $0<\frac{1}{N}$ なのだから、差 $\Delta Fx<\frac{1}{N}$ であり、またそうであり続ける。[ゆえに Fx は上記のように連続である].

§41　[連続函数の和、積、商は連続函数である]

【定理】　x は a とまったく独立で可測な自由変数とする。a±x という形を持つ函数は、x のすべての可測値に対して、しかも正および負の両方の増加分について、連続である。同じことは ax や xa という形の函数にも、また x/a(a は 0 でないとする）という形の函数にも当てはまる。さらに a/x という形の函数も、0 でない x について連続である。

（証明）序文の§.27,§.29,§.36 から知られる。

§42　[連続函数の累乗は連続函数である]

【定理】　一つの自由変数 x の任意の累乗は、可測な変数値において、正の増加分と負の増加分のいずれについても連続である。

（証明）　一次の累乗の場合、命題は証明を要さない。x^1 は x だからである。しかし二次以上の累乗についてはこうなる。まずそれを x^n （ただし n >1）と表わすと、§で a=x+Δx, b = xとおけば、$\Delta Fx=\Delta(x^n)=(x+\Delta x)^n-x^n$ となり、その絶対値は　$<n(x+\Delta x)^{n-1}\cdot\Delta x$ である。だが右辺は、x の大きさに関わりなく、x が可測数である限り、Δxとともに限りなく減少する。[したがって自由変数の任意の累乗は当該の変数において連続である。]

§43　[有理整函数の連続性]

【定理】　一つの自由変数を持つ有理整函数(ganze rationale Function)は、可測な

(meßbar)変数値において、正の増加分と負の増加分のいずれについても連続である。
（証明）　有理整函数であるとは、すべての値 x において、形式 $a+bx+cx^2+dx^3+\cdots+lx^m$ を持つ表現(Ausdruck)　と等価であることを謂う (a.b.c.d.などはすべて可測数、m は任意の自然数)。$Fx=a+bx+cx^2+dx^3+\cdots+lx^m$ とすると、$\Delta Fx=F(x+\Delta x)-Fx=[a+b(x+\Delta x)+c(x+\Delta x)^2+d(x+\Delta x)^3+\cdots+l(x+\Delta x)^m]-[a+bx+cx^2+dx^3+\cdots+lx^m]=b\Delta x+c[(x+\Delta x)^2-x^2]+d[(x+\Delta x)^3-x^3]+\cdots+l[(x+\Delta x)^m-x^m]$ である。
しかし直前の§42 で見たように、Δxが限りなく減少するにつれて[ ]で囲った数も限りなく減少するから、これらを$\Omega_1.\Omega_2.\cdots\Omega_m$ と表記できて、$\Delta Fx=b\Delta+c\Omega_1+d\Omega_2+\cdots+l\Omega_m$である。さて各項は§42 より限りなく減少するので、(係数がそのままであれば) 各項の代数和も限りなく減少し、ゆえにΔFx の値も限りなく減少する。[したがって函数 Fx も当該の変数において連続である。]

§44　[有理商函数の連続性]
【定理】　一つの自由変数の<u>有理商函数(gebrochene rationale Function)</u>もまた、分母が0 にならない限り、可測な変数値において、正の増加分と負の増加分のいずれについても連続である。
（証明）有理商函数であるとは、すべての[変数]値において、それが
$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots+lx^m)/(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots+\lambda x^\mu)$
という形式を持つ函数と等価であることを謂う。簡単のために、この表現の分子を fx, 分母をφxとおくと、fx もφxも有理整関数であり、それゆえすべての x の値において、両方向において連続である。ところで$\Delta Fx=F(x+\Delta x)-Fx=\frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)}-\frac{fx}{\varphi x}=\frac{fx+\Delta fx}{\varphi x+\Delta\varphi x}-\frac{fx}{\varphi x}$ (ただしφx も$\phi(x+\Delta x)=\varphi x+\Delta\varphi x$ も 0 でない) $=\frac{\varphi x\cdot fx+\varphi x\cdot\Delta fx-fx\cdot\varphi x-fx\cdot\Delta\varphi x}{\varphi x(\varphi x+\Delta\varphi x)}=\frac{\varphi x\cdot\Delta fx-fx\cdot\Delta\varphi x}{\varphi x(\varphi x+\Delta\varphi x)}$
とおくことができる。(なお φx つまり所与の商関数の分母は 0 でなく、またφx＋Δφx も、少なくとも差分Δφx のはじめのあたり、つまり絶対値が φx より小さいあたりでは 0 でない。) さて最後の式の分子 $\varphi x\cdot\Delta fx-fx\cdot\Delta\varphi x$ が限りなく減少しさえすれば、ΔFx は限りなく減少する筈だが、 Δxが限りなく減少するときΔfxとΔφxが限りなく減少する以上、すべてのxについて、$\varphi x\cdot\Delta fx-fx\cdot\Delta\varphi x$ は限りなく減少する。ゆえに云々。

§45　[片側不連続性]
【定理】　函数 Fx が、変数 x の特定値に対して、正の増加分か負の増加分のどちらかについて不連続であるとしたら、考えられるのは次の三つのケースのいずれかである。
第一に、表現 Fx が可測な数を表さない場合、あるいは、表現 F(x+ Δx)の表現に含まれるΔx に、任意の小さな値から始めてさらに小さな値を[順次]与えるとき、F(x+ Δx)が常に

(beständig)可測な数であり続ける(verbleiben)と言えない場合。

第二に、差 F(x+ Δx) −Fx の絶対値が、Δx をいくら小さくとっても、ある数よりも継続して(fortwährend)大きいままである(verbleiben)場合。

第三に、この差 F(x+ Δx)−Fx の絶対値が、[たしかに]Δx のある値に対して、与えられた商 1/N より小さくはなるが、そのままでいる(verbleiben)ことがなく、どの[Δx の]数についても、さらに小さいΔx があって、差 F(x+ Δx)−Fx が[再び]$\geqq \frac{1}{N}$ となってしまう場合。

（証明） これ以外の場合が存在し得ないことは自明である。しかしある条件のもとでこれら三つの場合が実際に起こることは、次の実例で確認できる。

1. 函数 Fx=1/(1−x)は x=1 という変数値に対して不連続である。なぜなら函数値 Fx が x=1 で値をとるとすれば、それは無限に大であり、不可測だからである。
2. $y^2=1-x^2$ という方程式が成り立つようにして y が x に依存するなら、変数値 x=1 と正の値Δx に対して、y は不連続である。[その理由は]F(x+Δx)という表現が可測な数を表さないからである。なぜなら y の平方＝$1-(1+\Delta x)^2=-2\Delta x-\Delta x^2$ を見ると、右辺は負数だが、周知のようにそのような数[y]は存在しないからである。[訳者。1 と 2 が第一の場合の実例。」
3. x=1 とそれより小さい値に対しては Fx=3x で、1 より大きいすべての値に対しては Fx=5x とせよ。すると Fx は x=1 と正数 Δx においては不連続である。なぜなら、差 F（x＋Δx）−Fx は =5(1+ Δx)−3=2+5 Δx となるが、これは継続して >2 であり続けるからである。[訳者。これが第二の場合の実例]
4. n は任意の自然数(wirkliche Zahl)とする。$1/2^n$ という形を持つ x のすべての値に対して、Fx の値は＝ 1 とし、それ以外の変数値については Fx=2x とする。そのとき Fx は、定理のなかの第三の理由から、x=0 と正の数 Δx において不連続である。[まず]この場合[つまり x＝ 0 場合]、Fx＝F(0)＝0 である。なぜなら、$1/2^n$ という形は x=0 とならないから。しかし $1/2^n$ という形を持つΔx のすべての値に対して、つまり$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$等々に対して、F(x+ Δx) =F(Δx)は＝ 1 となり、他の値に対しては F(x+ Δx)＝=F(Δx)=2 Δx である。ゆえに、差 F(x+ Δx)−F(x)は ＝ 1 だったり＝2 Δx だったりする。それゆえ、Δx が限りなく減少するとき、差 F(x+ Δx)−F(x) は[たしかに]限りなく減少しはするが、しかし、任意のΔx に対してもっと小さいΔをとったとき、「$1/2^n$ という形を持つゆえに差を 1 にするようなΔx」を「避けて」Δxを減少させることができるわけではない。

§46 [孤立した一変数値においてのみ連続な函数]

【定理】 連続的であるという性質 (Eigenschaft stetig zu sein)がある孤立した(vereinzelt)一変数値だけに属すような、若干の函数がある。

（証明） 次のような法則(Gesetz)に従って変数 x に依存する数 W=Fx を考えよう。すな

わち、「$(2m+1)/2^n$ という形を持つ x に対しては W=2x であり、他のすべての x に対しては W=3x である」という法則(Gesetz)に従って、変数 x に依存する数 W=Fx を考える。さてこの函数は W=0 において連続で、それ以外では不連続である。[なぜなら]まずΔx が限りなく小さくなるとき、x=0 における差 $F(x+\Delta x)-Fx=F(\Delta x)-F(0)$も、限りなく小さくなるから、x=0 で W は連続である。というのは、0 は$(2m+1)/2^n$ という形を持たないから $F(0)=3\cdot 0=0$ であり、他方、Δx が$(2m+1)/2^n$ という形を持つなら $F(\Delta x)=2\Delta x$、$(2m+1)/2^n$ という形を持たないなら$F(\Delta x)=3\Delta x$である。さて明らかにΔxが限りなく小さくなるとき、$2\Delta x$ も 3Δ も限りなく小さくなる。したがってあの函数は x=0 で連続である。

しかし W はそれ以外の値では不連続である。なぜなら差 $F(x+\Delta x)-Fx$ は、つねに次の四つの値　$3\Delta x$, $x+3\Delta x$, $-x+2\Delta x$, $2\Delta x$ の、どれか一つだけをとるからである。すなわち差は、$x+\Delta x$ と x のどちらも$(2m+1)/2^n$ という形を持たないなら $3\Delta x$ であり、x だけがこの形を持つなら $x+3\Delta x$ であり、$x+\Delta x$ だけがこの形を持つなら$-x+2\Delta x$ であり、$x+\Delta x$ と x の両方がこの形を持つなら $2\Delta x$ である。さて x=0 でないなら、すぐわかるように、Δx が限りなく小さくなるとき、第一と第四の場合なら、あの差は限りなく小さくなるが、第二と第三の場合、Δx が限りなく小さくなるとき、あの差が限りなく小さくなることはない。どんなに小さな Δx に対しても、$(2m+1)/2^n$ という形を持つ、もっと小さいΔx が見つかるからである。(商$(2m+1)/2^n$ は、ある m について、指数 n を限りなく大きくすれば、どんな所与の数よりも小さくすることができる。）ゆえに、x が$(2m+1)/2^n$ という形を持とうが持つまいが、Δx が限りなく小さくなるとき差 $F(x+\Delta x)-Fx$ も限りなく小さくなることはなく、むしろどのΔx に対しても、第一の場合なら差が $x+3\Delta x$ に、第二の場合なら差が $x+2\Delta x$ になるような、もっと小さなΔx が見つかるのである。

§47　[一変数における不連続性/変数のある総体における不連続性]

【定理】　函数が孤立したある一変数値において[だけ]連続性の法則に従うこともあれば、変数値のある総体(Inbegriff)[つまり区間]においてそれに従うこともある。後者は、開区間(a,b)（innerhalb gewisser Grenzen a und b)でこの法則に従うこともあれば、変数のすべての値にわたって全域的に（durchgängig）従うこともある。[以上はすでに見たところである]。[だが]逆にこういうことがあり得る。函数が孤立したある一変数値において連続性の法則に（一方向的であれ両方向的であれ）違反することもあれば、変数値のある総体[つまり区間]においてそれに違反することもありうる（後者は、与えられた開区間(a,b)であれ、あるいは変数のすべての値にわたって全域的にであれ)。しかもこの違反は、いずれの場合も、飛躍(Sprünge)による違反のこともあれば、空白(Lücke)による違反のこともある。

（証明）函数が連続性の法則に従う事例について定理が述べる[前半の]内容は、ここまでの議論から明らかである。定理がその法則への違反について語る[後半の]内容のみ話題にする。

1. 数 W が、 $x<1$ であるすべての x の値に対しては函数値 4x をとり、x=1 とそれより

大きい x の値に対しては函数値 5x をとるとすると、この函数は、「x=1 において、負方向に、しかも飛躍を通じて」連続性の法則に違反する関数の例を与える。 x<1 である x および x=1 においては 4x という函数値をとり、1 より大きいすべての値に対しては 5x という函数値を取るとすると、函数は、x=1 において負方向の増加についてだけ連続的である。最後に、x<1 であるすべての x に対して W=4x とし、x>1 なるすべての x に対して W=5x とし、x=1 においては W=10 とすると、この函数は x=1 に対してはどちらの方向についても連続でなく、それ以外のすべての x については両方向に連続である。

2. §46 で考察した函数はすべての変数値にわたって連続性の法則に違反しており、しかも間断なき(fortwährend)飛躍によって違反している。
3. W は、x のすべての値に対して W=ax という値をとるが、x が整数(ganzzählige Werthe)のときに限って W は存在しないか可測でないとする。この函数は、一定の孤立した変数値（ここでは 1, 2, 3, 4・・・）において、空白という仕方で連続性の法則に違反する函数の例を与えている。
4. 最後に、W は開区間(α,β)(innerhalb αund β)の外の値に対しては W=ax だが、開区間(α,β)のすべての変数値に対しては、W が存在しないか、[存在しても]可測でないか、いずれかだとする。これは、開区間（α,β）(von α bis β ausschließlich)のすべての変数値について空白(Lücke)を持つ函数になっている、云々。
[訳者。Bolzano には区間の概念はあるが、Intervall という言葉はなく、（α,β）や[α,β]という表記法もない。（α,β）を彼は「innerhalb αund β」かまたは「von α bis β ausschließlich（両端を排除してαからβまで）」と書き、[α,β] を表わすときには、「von α bis β einschließlich（両端を含めてαからβまで）」と書く。

§48　　[右側連続と左側連続の不一致]

【定理】　函数 Fx が、開区間(a,b)のすべての値に対して、正の増加分（負の増加分）に関して連続だからといって、負の増加分（正の増加分）に関しても連続だとは言えない。
（証明）　函数 Fx が、開区間(a,b)のすべての x の値に対して、また正のΔx について連続とする。そうすると正のωをとれば、F(x+ω) –Fx=Ω_1 となる筈である。さらに、x–i が開区間(a,b)に収まるように i をとると、F(x–i+ω) –F(x–i)も =Ω_1でなければならない。そこで i＝ωとおくと、当然この式から F(x) –F(x–ω)=Ω_1がでる。つまり差 F(x–ω) –Fx も絶対値が限りなく減少することになるので、人は Fx が負のΔxについても連続だと言うかもしれない。しかし F(x–i+ω) –F(x–i)＝Ω_1 という式の場合、Ω_1 の値はωだけではなく、x–i にも、したがって i にも依存することを忘れてはならない。したがって、i が限りなく小さくなるとき、このΩ_1 も限りなく小さくなると結論することは許されない。なぜなら、F(x+ω) –Fx が限りなく減少するとき、i=ωという値に対して、差 F(x–i) –Fx が継続して(fortwährend) ある可測な数より大きくあり続ける(verbleiben) ことが排除できないからである。なぜなら、x–i という値について、そして正の増加分に対して、Fx が連続である

という条件から出てくることは、$F(x-i+\omega)-F(x-i)$ が、一つの(einerley) i について、あるωとともに限りなく減少することに過ぎないからである。しかし i が変わればωも変わる。

だから言えることはせいぜい、差 $F(x-i+\omega)-F(x-i)<\frac{1}{N}$ となるように、ωが i より小さくなることが必要だ、という程度のことである。

たとえば、$x<2$ であるすべての値について $Fx=x^2$ であり、$x\geq 2$ であるすべての値について $Fx=x^3$ だとしよう。当然、Fx はすべての正の増加分について連続である。なぜなら、値 $x=2$ について、$F(x+\Delta x)-Fx=(2+\Delta x)^3-2^3=12\Delta x+6\Delta x^2+\Delta x^3$ [であるが、これはΔxとともに限りなく小さくなるからである]。しかし負の増加分については、$F(x-\Delta x)-Fx=(2-\Delta x)^2-2^3=-4-4\Delta x+\Delta x^2$ [であって、それはΔxとともに限りなく小さくならない]。ゆえに函数は[負の増加分については]不連続なのである。

§49

【定理】　函数 Fx は、開区間(a,b)のすべての値に対して連続とする。しかし単に連続であることから、次のことは帰結しない。すなわちこの開区間のすべての x の値について、次のような条件を満たす一定の(ein und eben dieselbe)数 e は存在しない。すなわち、「差 $F(x+\Delta x)-Fx<1/N$ とするためには、Δ x の絶対値を e を超えてまで小さくするには及ばない」と言えるほど十分に小さい e は存在しない。

(証明) 次のことは、それ自体として矛盾していないし、我々が採用している連続性の概念に照らしても矛盾していない。すなわち、Δx を小さくするごとに $F(x+\Delta x)-Fx<1/N$ となり、またそうであり続ける(verbleiben)ためには、別の x に対しては別のΔx が、具体的に言えば、x がある限界 c に[前よりも]近づくにつれて、前よりも小さなΔx が必要になるということは、それ自体として矛盾していないし、我々が採用している連続性の概念に照らしても矛盾していない。

たとえば函数 $Fx=1/(1-x)$ で、x が限りなく 1 に近づくとしてみよう。簡単のために $x=1-i$ とおくと、$F(x+\Delta x)-Fx=\Delta x/i(i-\Delta x)$ となる。これが $<\frac{1}{N}$ になるためには、$\Delta x<i^2/(N+1)$ でなければならない。したがって i がさらに小さくなれば、Δx もさらに小さくならざるを得ない。そして i が限りなく減少するとき、つまり x が限界 1 に限りなく近づくとき、差 ΔFx が $<1/N$ になるために、Δx はどんな所与の値よりもますます小さくならなければならない。[ゆえに云々]。

§50　[連続という条件下での、極限値と函数値の一致]

【定理】　ある数 W=Fx は、一般に(überhaupt)、あるいは変数 x の所与の開区間(a,b)で、連続性の法則に従うものとする。さらに、x を開区間(a,b)の特定の値 m に望むだけ近づけると、x に対する W の値と一定の可測数 M の差も限りなく小さくなるものとする。そのと

き x=m に対してこの数 W は M となる、すなわち Fm=M であると結論して差し支えない。
（証明）　函数 W=Fx が x=m で示す連続性ゆえに、ω と Ω を通常の意味でとれば、差 F(m+ ω) −Fm は ＝Ω でなければならない。さて題意ゆえに $F(m+\omega)-M=\Omega_1$ だから、引き算して $M-Fm=\Omega_1-\Omega_2=\Omega_3$ でなければならない。だが M と Fm は定数(unveränderlich) だから、この方程式から M＝Fm が導ける。

§51　　[連続性がもたらす情報]

【補題 1】　　連続性の前提抜きでは決定できなかった函数値が、連続性の前提を置くことによって、上のようなやり方で決定できることがある。正値の変数[x>0]に対して W＝a+x であるとすると、この条件だけでは x=0 での[W の]値を決めることはもちろんできない。しかしさらに、W が継続して(fortwährend)、あるいは少なくとも x=0 の近くで(um~herum)、連続性の法則にしたがって変化すると前提してよいのなら、以上の条件を組み合わせることによって、W が x=0 でとる値を決定することができ、しかもそれはまさに W=a なのである。なぜなら[W が]この値をとるときに限って、Δx が限りなく小さくなるとき、差 ΔW ＝F(x＋Δx) −Fx=(a+x+ Δx)−(a+x)= Δx も限りなく小さくなるからである。

さらに注目すべき事例を挙げれば、無限級数 $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$ in inf を x=1 で無限の数表現 1−1+1−1+・・・に移行(Übergang)させ、しかもこの移行が連続性の法則に従う移行であるととり決める(festsetzen)ならば(sobald)、以前は決定できなかった[RZ7. § 29]無限の数表現 1−1+1−1+・・・(in inf)の値を決定することができる。なぜなら、無限級数 $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$ in inf　は,周知のように x<1 であるすべての x に対して可測であり、1/(1+x) という値を持つが、この値は x が限りなく値 1 に近づくとき、値 $\frac{1}{2}$ に限りなく近づくからである。連続性の法則が、級数 1−1+1−1+・・・(in inf) の値が= $\frac{1}{2}$ になることを要求する(fordern)のである。

§52

【補題 2】　　分数(Bruch)の形式を持つ表現、たとえば $(x^3-7x-6)/(x^3-2x^2-9x+18)$ は、x=3 の場合、0/0 という表現に移行する。[一般に] ある表現が、そこに登場する x のある値に対して不定(unbestimmt)の数、[つまり]任意の数を表しうる 0/0 という表現に移行することは稀ではなく、分数形式を持つ表現では特にそうである。しかしこの表現の表わす数が、すべての x で(allgemeine)、あるいは 0/ 0 に転じる x の値の近く(Nähe)で連続的に変化しているなら、いま話題になっている数[たとえば x=3]がこの函数でとる値を完全に決定することがしばしば可能である。与えられた表現が 0/0 に転じるような x=α の代わりに、x= $\alpha+\omega$ と置き、さらに表現の適切な変形によって数 A を発見し、しかも ω が限りなく小さくなるときくだんの表現の値が A に望むだけ近づくようにすることができるなら、まさに

A こそがくだんの数が $x=\alpha$ でとる本当の(eigentlich)値であると結論しても差し支えない。上の例で言えば、x に $3+\omega$ を入れると、

$$(3+\omega)^3-7(3+\omega)-6=20\omega+9\omega^2+\omega^3$$

$$(3+\omega)^3-2(3+\omega)^2-9(3+\omega)+18=6\omega+7\omega^2+\omega^3$$

そこで分母と分子を ω で割ると、$(20+9\omega+\omega^2)/(6+7\omega+\omega^2)$　となる。すぐ分かるように、この数は、ω を限りなく減少させると、20/6=10/3 に限りなく近づく。ゆえに、所与の函数 $(x^3-7x-6)/(x^3-2x^2-9x+18)$ が、全ての変数値、ないしはこの値[3]の付近で(um～herum)連続性の法則に従う限りにおいて、x=3 でとるべき値は 10/3 なのである。同様にして、x=a において $(a^3-x^3)/(a-x)$ がとる値は $3a^2$ であり、x＝a において $(a^2-2ax+x^2)/(a^3-x^3)$ がとる値は 0 でなければならない。この函数が x=a で連続だというのであれば。

§53

【定理】　開区間(a,b)のすべての x について連続な函数 Fx を考える。この函数が次のような仕方で非常に多くの x の値に対して同じ値 M をとるなら、すなわち、開区間(a,b)にいくら近接した(nahe liegende)二つの可測な数を[新たに]とっても、これら二つの数の間に Fx＝M となるような x の値が新たに(abermal)見つかることがないほど、この函数が x の非常に多くの値に対して(für so viele Werthe der x)同じ値 M をとっているなら、私はこう主張する。Fx はもともと(eigentlich) 開区間(a,b)で不変(nicht veränderlich)な函数なのであり、継続して=M であり続けているのだと。

（証明）　x を開区間 (a,b)の任意の値とする。[題意より] 函数 Fx は連続だから、ある十分に小さい i があって、i とそれより小さい[i の]値については $F(x+i)-Fx<\frac{1}{N}$ となり、またそうであり続けている。さて、開区間(a,b) の内部に、[a と b より]もっと近い二つの可測数でできたどんな開区間をとっても、その中に[M という函数値以外をとる変数値]x が見つからないというのだから、開区間(x,x+i)にもこのような値[M という函数値をとる値]がなければならない。その値を x+j とおくと、j は i と同符号であり、絶対値が j ＜ i である。ゆえに、x+j に対しても、上と同じ関係 $F(x+j)-Fx<\frac{1}{N}$ が成り立たなければならない。しかし $F(x+j)=M$ というのだから、$M-Fx$ はその絶対値について $M-Fx<\frac{1}{N}$ でなければならない。さて M と Fx は i と独立な一対の可測数だが、分数 $\frac{1}{N}$ は i が限りなく減少するにつれて限りなく減少しうる。したがって(RZ7.§92)、M=Fx でなければならない。ゆえに函数 Fx は開区間$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$のどの x の値についてもまったく同一不変な値をとる。

§54　　[「もっとも近い(nächst)」/「隣」という現象]

【補題】　ゆえに、逆に(umgekehrts)こんなことも言える。開区間(a, b)において、x に依存しつつ連続的に函数値が変わる(stetig veränderlich) 函数 Fx を考えよう。その場合、こんなことがありうる。すなわち、この函数は開区間(a, b)で無限回にわたって(unendliche Mahle)同一の[函数]値 M に回帰する(zurückkehren)にも拘らず、それでも、その間(zwischen)に Fx=M となるような第三の[x の]値が見つからない、そのような互いに近い(nahe)[二つの]x を、開区間(a,b)から見つけることができる。言い換えると、Fx=M となる x たちについては、[上の条件のもとで]どの[変数]値に対してもその「次(nächst)」の[変数]値が一つなければならない。つまりある[変数]値に対しては、他にもっと近い[変数]値が見つからないような、もっとも近い(nächste)[x の変数]値が存在する。

[最大値・最小値の定理]

§55　　[不連続]

[定理]　変数 x を望むだけ（als man nur immer will）可測数 c に近づけるとき、[それに応じて]一価の函数 F が無限に多くの[函数]値(die unendlich vielen Werthe)をとるとする。その場合、たとえどんな[に大きい]可測数を指定されても、絶対値でそれを超える値が、先ほどの[一価の函数 F がとる無限に多くの]函数値のなかから、［かならず]見つかるのなら、この函数は x=c において連続ではない。

（証明）仮にその函数が x=c で連続だとしてみよう。[そうすると Fx がその x=c で取るであろう]値 Fc はある可測な数 C に等しいだろうし、[Fx は x=c で連続なのだから] 差 F(c±ω)−Fc はωの減少とともに限りなく小さくなるのでなければならない。しかし前提によると、どんな可測数を示されても、F(c±ω)はωの減少とともに絶対値においてこの可測数よりも大きくなるというのだから、F(c±ω)−Fc＝F(c±ω)−C は限りなく小さくなることができない。[しかしこれは題意に反する。ゆえにこの函数は x=c において連続ではない]。

（実例）　x が値 c に限りなく近づくとき、函数 a/(c−x)　はどんな所与の数よりも[絶対値において]大きくなる。ゆえにこの函数もまた値 x=c において連続でない。

§56　　[不連続（閉区間[a,b]における）]

[定理]　変数 x が閉区間[a,b](von a bis b einschließlich)の全域を動くとき、無限に多数の[函数]値(die unendlich vielen Werthe)をとる x の函数を考える。たとえどんな[に大きい]可測数を指定されても、この無限個の[函数] 値のなかからそれを超える(übertreffen)或る[函数]値を見つけることができるなら、この函数は閉区間[a,b]のすべての値について連続、とは言えない。

（証明） 次のような可測数の無限列を考える。すなわち前の数よりも後の数の方が大きく、しかもどんな任意の大きさ(Größe)を示されても[いずれは]それに追いつく(erreichen)ような、そのような列を考える。たとえば数 1. 2. 3. 4.・・・in inf という無限列がそうである。

さて次のような x の[変数]値の列 x_1, x_2, x_3, x_4・・・in inf をとることができる筈である。すなわち、(1) x_1, x_2, x_3、x_4・・・はすべて開区間(a,b)にあり、さらに(2) x_1, x_2, x_3、x_4・・・に対応する函数値たち $Fx_1, Fx_2 F, x_3$、$, Fx_4$・・・が、絶対値において、先ほど設定したあの[可測数の無限]列の同じ番目の項(Glied)より大きくなる、つまり $Fx_1 > 1$。$, Fx_2 > 2$。$F, x_3 > 3$。$Fx_4 > 4$・・・となるという特性を持つような、そのような x の値の列 x_1, x_2, x_3、x_4・・・in inf をとることができる筈である(§より)。[訳者。「§より」の意味は不明]。

さて[函数 Fx が閉区間[a,b]で連続だと仮定すると]、a と b の外部にない[ある]定数(eine gewisse nicht außerhalb a und b liegende beständige Zahl) c があって、ωを限りなく小さくなり得る数とし、また p を c、q を $c \pm \omega$とおいたうえで、p と q という一対の任意に近づくことのできる限界のなす開区間に、無限個の[変]数 x_1, x_2, x_3、x_4・・・の全部か、あるいは[全部でなく]その部分ではあっても、それでも無限個の集まり(Menge)と言えるほどには大きいそれの部分（entweder alle,oder doch ein so großer Theil derselben,daß ihre Menge schon selbst unendlich ist)を挟む(sich einschließen lassen)ことができる筈である。

ところが[変]数[値]x_1, x_2, x_3、$, x_4$・・・の一つの(einer)無限の集まりには、[函]数[値]$Fx_1, Fx_2. Fx_3. Fx_4$・・・の一つの(eine)無限の集まりが対応し(entsprechen)、しかも[題意より]後者は、どんな可測数を指定されても、それを超えるある数を抱えている。なぜなら、これらの数の一番目つまり Fx_1 は>1 であり、二番目つまり Fx_2 は>2 であり、三番目つまり Fx_3 は> 3、云々なのだから、こうした[たとえば]n 個の[函数]値の中には、最小に見積もっても＞n であるような一つの[函数]値が[かならず]見つかる筈だからである。

[だが]そうだとすると、前の定理を踏まえて直ちにこう言える。すなわちあの函数は、他の[変数]値に対してはともかく、[変数]値 x=c に対して、当然、連続ではあり得ない。なぜなら、どんな可測数を指定されても、それを超えるような Fx の[函数]値が開区間(c, $c \pm \omega$)に出現するからである。

さて c=a であるか、c=b であるか、あるいは c は開区間(a,b)にあるか、そのいずれかであった。ゆえに、[この函数は閉区間[a,b]で連続であるとは言えない、という]題意は証明された。

§57　[有界性]

[補題]　それゆえ、逆に(im Gegentheil)こう言える。Fx を閉区間[a,b]のすべての値において連続な函数とすると、函数 Fx が閉区間[a,b]でとるどの値よりも絶対値において大きい可測な定数 N がなければならない。

§58

[定理]　函数Fxは閉区間[a,b]において連続とする。変数xに無限の集まり(eine unendliche Menge)をなす開区間(a,b)の値を順次とらせるとき、Fxがとる無限に多くの[函数]値が或る可測な定数Cに限りなく近づくなら、閉区間[a,b]の値のなかにFc＝Cとなる値cが少なくとも一つ存在する。

（証明）　無限に多くの[変数]値、$x_1.x_2.x_3.x_4$・・・に対応して、[無限に多くの函数]値が数Cに限りなく近づくものとする。そのとき§56から、$x_1.x_2.x_3.x_4$・・・ の全部でないにしても、[$x_1.x_2.x_3.x_4$・・・からとった部分的な]ある無限の集まりを、cとc±ωという形を持つ一対の限界のなかに挟むことができる（ただしcはaとbの外部にないある定数)。ところがくだんの函数は変数値x=cで連続なのだから、§50よりFc=Cでなければならない。

§59　　[前節への注意]

[補題]　[定理58において、Fxがx=aとx=bでとる］二つの値FaとFbに配慮しないとき、次のことは必ずしも保証されない。すなわち[たとえ] Fxの[函数]値が限りなく定数Cに近づくにしても、そのとき、Fxがとる値のなかにそれ[C]に完全に等しい[函数]値が含まれているかどうかは定かではない。なぜなら、先に[§56,58で］「Fc=Cでなければならない」と証明したそのcについては、「aとbの外部にない」とは前提したものの、「aとbの間に(zwischen)なければならない」とは前提できなかったのだから、Fx がちょうどあの数Cになるのがx=aあるいはx=bのときだということも、ないとは言い切れないからである。たとえば、函数Fx [7+5x]が ［27という値に]無限に近づくようなxの[変数]値の一つの無限の集まりは存在するが、しかし函数7+5xが27という値をとる、開区間(0,4)の変数値は存在しない。理由は、7+5xがちょうど27になる唯一の[変数]値があの二つの限界の一方、すなわちx=4だからである。

§60　　[最大値・最小値の存在定理]

[定理]　函数Fxは閉区間[a,b]において連続とする。 xに閉区間[a,b]のすべての値を順次とらせるとき、この函数がとるすべての値にはかならず最大値(einen größten Werth)が一つ(ein)存在する。ただし「<u>最大値</u>」とは「それより大きい値がない」の意味である。「<u>最小値</u>」についても同様であって、それは「それより小さい値がない」の意味である。

（証明）　函数が閉区間[a,b]で一定値をとるなら、上の命題は自明である。なぜならまさにこの定数値が上の意味での<u>最大値かつ最小値</u>だからである。しかし Fx が所与の閉区間[a,b]で様々な(verschiedene,ungleiche)値をとるとき、当然、同一の値が最大値と最小値の両方であることはありえない。さてあの関数が一つの最大値を持つことさえ証明できれば十分である。なぜなら、すぐわかるように同様のやり方で<u>最小値</u>の存在も示される筈だからである。

すでに§57で見たように、ある可測な定数Nがあって、「Nより大きいすべての数は、

函数が閉区間[a,b]でとるすべて函数値よりも大きい」と言える。

だが、N よりも小さ目の数をとったとき、「それより大きいすべての数は、函数がとるすべての値よりも大きい」と言えるとは限らない。なぜなら、[たとえば] Fa より小さい数 D をとると、当然、この数については「D より大きいすべての数は Fx のすべての値より大きい」とは言えないからである。というのは、Fa は、D よりは大きいが、「Fx のすべての函数値(Fa という値を含めて)よりも大きい」訳ではないからである。ゆえに[RZ7. § 109 ゆえに]、次のような可測な定数 M がなければならない。すなわち、「それより大きいどんな数も、函数が閉区間[a,b]にわたってとるすべての値よりも大きい」と言える可測な定数のなかで、<u>最小(die kleinste)</u>である数 M がなければならない[訳者。いわゆるボルツァーノ・ワイアシュトラスの定理]。さてこの数についてはこう言える。それは、函数の変数の a と b の外(außerhalb)にないある値に対して(für irgend einen nicht außerhalb a und b gelegenen Wert)函数がとる値であって、しかも函数がそれを超えて(darüber)大きな値をとらないような、そんな値である、と。Fx が閉区間[a,b]にわたってとるすべての値のなかに、=M であるような値が一つもないとすれば、先の命題ゆえに、数 M に限りなく近づくような Fx の値もないことになるだろう。そのとき、十分に小さい数μが見つかって、差 M−Fx が閉区間[a,b]にわたるすべての値に対して＞μであり続けることになるだろう。しかしそのとき、数 M は、「それより大きい数が Fx のすべての値よりも大きい」という特性を持つと言える数のなかでの、最小ではなくなる。なぜなら、M−μもまた、上と同じことが言える、しかももっと小さな数になるだろうから。したがって残る選択肢は、函数が閉区間[a,b]にわたってとる様々な値のなかに、=M であるような値が少なくとも「一つ」ある、と認めることである。しかしこれよりも大きな数はない。なぜなら、さもなくば、「M より大きいどの数も、函数が x=a から x=b にわたって(von a bis b)どの函数値よりも大きい」、ということが成り立たなくなるからである。こうして、これらの値の中に、それよりも大きい値がないような値が少なくとも「ひとつ」存在することが確認された。

[中間値の定理]

§61　　[開区間と閉区間についての注意]

[補題 1]　ある連続函数が<u>開区間(a,b)</u>で最大値と最小値をとることは必ずしも保証されない。Fa と Fb という値にかならず配慮しなければならない。なぜなら、たとえば函数 5x が開区間(1,10)でとるすべての値には、最大値も最小値もないからである。最大値がないことはこうしてわかる。開区間(1,10)の任意の数、例えば 9 をとると、函数値は 45 になるが、もっと 10 に近い別の数、例えば 9+1/2 をとると、函数値はもっと大きな数 47+1/2 にな

る、云々。また最小値もない。なぜなら、開区間(1,10)のどの x の値、例えば 2 について函数値は 10 になるが、もっと 1 に近い別の値、たとえば 1+1/2 をとると、そのとき函数値は 7+1/2 となるが、それは 10 より小さくなる、云々。

§62　　[連続性法則の違反]

[補題 2]　　逆に、変数 x が閉区間[a,b]ですべての変数値をとるとき、函数 Fx がとる値のなかに、「どの函数値についても、それより大きい（それより小さい）函数値が見つかる」という意味で、最大値（最小値）が存在しないのなら、この函数が連続性の法則に違反するような、そのような変数値が閉区間[a,b]に少なくとも一つ存在する。函数 a/(c−x)については、x=c がその一例を与えている。

§63　　[中間値の定理（実例）]

[定理]　　次のような法則(Gesetz)にしたがって変化する函数が存在する。すなわち、「函数 Fx の異なる二つの値 Fa と Fb の間(zwischen)にある、どんな可測な数 M を指定されても、まさに[変]数 a と b の間(zwischen)に可測な[変]数 m を見つけて、それに対応する Fx の函数値すなわち Fm が＝M となるようにすることが可能である」という法則にしたがって変化する函数が存在する。

（証明）例えば cx がこのような函数である。理由は以下のとおり。まず x=a とし、さらに x=b とすると、Fa=ca であり、Fb=cb である。さて M を値 Fa（つまり ca）と値 Fb（つまり cb）の間の数とすれば、cb>M>ca か cb<M<ca でなければならない。ゆえに、c で割ると、c が正なら b> $\frac{M}{c}$ >a または b< $\frac{M}{c}$ <a、c が負なら a> $\frac{M}{c}$ >b または a< $\frac{M}{c}$ <b である。そのとき、いずれにせよ、$\frac{M}{c}$は a と b の間の数だが、あの函数の x のところにこれ[$\frac{M}{c}$]を入れると c・($\frac{M}{c}$)=M を得る。ゆえに当然、その函数 cx が ca と cb の間の値 M をとるような、a と b の間の変数値が存在する。

§64　　[中間値の定理（準備）]

[定義]　　函数 Fx が上記の特性を有するなら、すなわち「二つの[函数]値 Fa と Fb の間のどんな数 M に対しても、変数 x として a と b の間の値 m をとって、Fm＝M となるようにすることができる」という特性を有するとき、簡潔に、「<u>函数 Fx は</u>、<u>[函数]値 Fa から別の[函数]値 Fb に移行するとき</u>、<u>かならず</u>、<u>その間の M をすべて(jeden)とらなければならない</u>」と言うことにする。この表現は次の二つの内容を指している。第一に、数 Fa と Fb の間にあるどの(jede)数も、つまり Fa>M>Fb または Fa＜M＜Fb という関係を持つどの数 M も、Fx が一度（もしかすると数度）とる値に含まれていること。第二に、いま述べたこと

は（二度以上かどうかはいざ知らず)、少なくとも一度は[まさに]変数値 a と b の間の値 x=m で、すなわち a>m>b あるいは a＜m＜b という関係にある x=m で起きているということ。

§65 [中間値の定理の証明（いわゆる、ボルツァーノ・ワイアシュトラスの定理による）]
[定理] 全域にわたって(durchgängig)連続な函数、またはある開区間において連続な函数は、一つの函数値から別の（それと等しくない ungleichen）函数値に移行するとき、その間にあるすべての函数値を少なくとも一度はとらなければならない。

[訳者。ボルツァーノの『関数論』草稿には「継続的」を意味する“fortwährend“という言葉が頻出する。まず彼はこの言葉を fortwährend größer als 3 のように使うことがあって（この§6 もその一例)、それは「x が変わっても函数値 Fx は 3 より大きい状態をずっと維持する」という意味である。今後、これを「ずっと」と訳す。
他方、少し後でのことだが、fortwährend の後ろに wachsen（増加）あるいは abnehmen（減少）という言葉が続くことがあるが、それはいわゆる「単調増加」、「単調減少」を意味するので、そのように訳しておく。ちなみにボルツァーノには monoton という言葉がない]。

（証明） 函数 Fx は[二つの]限界(Grenzen)がなす開区間において連続とする。この開区間から一対の変数値 a と b を、Fa と Fb の値が一致しないようにとる。小さい方を Fa とする。

Fa と Fb の間の任意の数を M とすると、M－Fa は正であり、x=a における函数の連続性ゆえに、十分に小さい（正または負の）数 i をとって、M－F(a+i)も正になるようにすることができる。このとき、絶対値が十分に小さい i をとって F(a+i)－Fa< M－Fa となること、しかも i をいくら減少させてもこの式が成り立ち続ける(verbleiben)、という条件だけは外せない。[つまり] i のこの値と、それより小さい i のすべての値に対して、表現 M－F(a+i)はずっと(fortwährend)正であり続ける、という条件は外せない。[訳者。§39 を参照]。

[さて] i を差 b－a と同符号にとり、i の絶対値を徐々に大きくして絶対値 b-a になる(erreichen)までにすると、そのとき a+i=a+(b-a)＝b となるが、当然、M－F(a+i)=M－Fb はもはや正でなく、すでに負になっている。なぜなら、もしそうでなければ、M は Fa と Fb の間にあるとは言えないだろうから。それゆえ、M－F(a+i)という表現を正にするという性質が数 i に帰属するにしても、それはすべての[i の]値におしなべて(überhaupt)帰属するのではなく、「ある値よりも小さい[i の]すべての値に(für alle Werthe zu, die kleiner sind als ein gewisser)帰属する」のである。そこで当然（§によって[RZ7.§109 によって])、絶対値においてそれより小さいすべての i の値がこの性質を持つと言えるような、そのような値のなかで絶対値において最大である、一つの可測数 m が存在する(es gibt eine meßbare Zahl m, die ihrem absoluten Werthe nach die größte derjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle absolut kleineren Werthe von i diese Eigenschaft noch haben.)[いわゆるボルツァーノ・ワイアシュトラスの定理による]。この m の特性を考察し、[併せて] i に値 m を与えたとき表現 M-F(a+i) がとる値を吟味しよう。

1. まず m の決まり方より、m が i つまり b－a と同符号であることが知られる。しかしさらに m がその絶対値において <b－a であることに注意すべきである[以下にそれを証明する]。まず、すでに見たように M－Fb は負なのだから、x=b における函数 Fx の連続性ゆえに、ある正または負の十分に小さい数ωがあって、M－F(b－ω)も負にならなければならない。ここでωを b－a と同符号、したがって i や m とも同符号として差し支えない。

   さて[仮に] m が絶対値について＜b—a でないとすると、m は＝b－a または ＞b－a とならざるを得ないが、

   (A) 前者の場合、b=a+m であり、したがって M－F(b－ω)＝M－F(a+m－ω)は負である。この場合、その絶対値が <m でしかも M－F(a+i)を負にするような値 i=m－ω が存在することになる。[だが]そのとき、「絶対値が <m であるようなすべての i が M－F(a+i)を正にする」が真でなくなってしまう。[ゆえに m＝b－a ではない]。

   (B) 後者の場合、つまり m の絶対値が＞b－a となる場合、まさに b－a が、M－F(a+i)＝M－Fb を負にする、m より小さい (i の) 値を表すことになるだろうが、しかしそれは、「m より小さいすべての i は、M－F(a+i)を正にする」という前提に真っ向から矛盾する。[ゆえに m＞b－a ではない]。

   したがって[A と B を考え合わせると]、m の絶対値は<b－a と認めざるを得ない。しかしその場合(§)当然、a+m は開区間(a,b)の値であることになる。

2. M－F(a+i)という表現が i=m でとる値つまり M－F(a+m)は正でも負でもあり得ない。なぜなら、

   a) M－F(a+m)が正だとすると、a+m が[開区]間(a,b)にあり、かつ函数 Fx が x=a+m で連続である以上、M-F(a+m±ω)を正にする十分に小さいωが存在しなければならない。しかし値 m+ωと値 m—ωの一方は、当然、絶対値で m より大きい。そのとき、「m は、m より小さいすべての i は M－F(a+i)を正にする、と言えるなかでの最大の値」ではなくなってしまうだろう。[ゆえに M－F(a+m)は正ではない]。

   b) また M－F(a+m)は負でもあり得ない。なぜなら、もし負だとすると、M－F(a+m±ω)を負にするような、十分小さいωが存在する。ところが値 m+ωと値 m—ωの一方は m より小さいから、「m より小さいすべての i は M－F(a+i)を正にする」が真でなくなってしまう。[ゆえに M－F(a+m)は負でない]。

[さて]M は可測であり、Fx の連続性からして値 F(a+m)も可測だから、差 M−F(a+m)も可測数である。しかしこの差が正でもなく負でもないというのだから、M−F(a+m)＝０つまり M＝F(a+m) であるとしか考えられない。こうして次のことが証明された。すなわち、そこにおいて函数 Fx＝F(a+m)があの値 M をとる a+m の値、つまり x の値が、a と b の開区間に一つ存在する。

§66　［中間値の定理（説明）］

[補題]　この定理で主張され証明されたのは次の内容である。函数 Fx が閉区間[a,b]で(von a bis b einschließlich)連続なら、値 Fa と Fb の間(zwischen)の任意の値 M に対して、a と b の間に Fx=M となる x の[変数]値が少なくとも(wenigstens)一つ存在するということ。ただしこの定理は、Fx が M になるような x の値が一つしか存在しないと主張するものではない。実際、このような値が複数個存在する例がある。例えば、函数 $x^3-9x^2+26x+1$ は x=1 で値 19 を、x=5 で値 31 をとるが、19 と 31 の間の値 25 については、x=2 でも x=3 でも x=4 でもこの値をとるのである。いや複数どころか、値 Fa と Fb の間の同じ値 M になるような、互いに異なる無限個の（unendliche viele）変数値が[開区]間(a,b)に存在し、しかもそれでいて Fx が連続函数であることを失わないような例もある。たとえば、x<5 ならば Fx=4x、5≦x≦10 ならば Fx=20（定数）、x>10 ならば Fx=7x−50 とすると、函数 Fx の変化の仕方が§38 の連続性の法則に叶っていることはすぐに知られる。 Δx が限りなく減少するとき、すべての x について差 F(x+Δx)−Fx も限りなく減少するからである。まず ＜5 である x について、F(x+Δx)−Fx＝4・(x＋Δx) −4x=4Δx である。x=5 と負のΔx について、F(x—Δx)−Fx＝４・(５—Δx) —4・5＝—4Δx である。対して[x=5 と]正のΔx については、つまり開区間(5,10)のすべての x の値については、F(x+Δx)−Fx は一定、つまり＝20−20=0 である（これは、ΔFxが限りなく減少するという前提に矛盾しない。なぜなら、ΔFxが限りなく減少するとは、$\Delta Fx < \frac{1}{N}$ であり、そうであり続ける(verbleiben)の謂であるが、いまの例では $0 < \frac{1}{N}$ なので、その条件に叶うからである。）x=10 と負のΔx についても、F(x—Δx)−Fx=20−20=0 である。しかし[x=10 と]正のΔx については、F(x+Δx)−Fx= ７・(10+Δx) −50−20=7Δx である。同様に、x>10 については F(x+Δx)−Fx= ７・(x+Δx)−50−7x+50=7Δx である。

ゆえに当然、この函数はすべての変数値に対して連続である。それは x=1 で値 4 をとり x=11 で値 27 をとる。さて開区間(1,21)のどの[変数]値で、この函数は 4 と 27 の間の値 20 をとるかと訊かれれば、私は、「まず x=5 で 20 をとる、次に閉区間[5,10]に含まれるすべての、したがって[変数]値の無限の集まり（eine unendliche Menge von Werthe)で 20 をとる、そして>10 であるような x になって初めて別の値をとる」と答える。

[合成函数についての記載（§67から§83）は割愛する]

[中間値の定理の逆は成立するか]

§83　　　[中間値の定理の逆は成立するか]

[次の話題へ]　　すでに§65 で見たように、すべての連続函数には「ある函数値から別の函数値に移行するとき、かならずその間(zwischen)のすべての函数値を[それぞれ]少なくとも一度とる」、という性質が備わっている。そこで当然、次のことが問題とならざるを得ない。この性質は連続函数だけに帰属するのではないだろうか、つまりこの性質を持つ函数はかならず連続ではないだろうか。[しかし]次の定理がこの問いに対して[否定的に]答える。

§84　　　[一般に中間値の定理の逆は成立しない（反例）]

[定理]　　ある函数が一つの値から別の値に移行するとき、かならずその間の値を一度または複数回とるからといって、この函数が連続性の法則にしたがって変化しているとは限らない。

（証明）[函]数 W がある値から別の値に移行するときかならずその間のすべての値をとるという前提は、次の[第二の]前提、すなわち「$x=(2m+1)/2^n$ という形の変数値に対しては W＝ax で、それ以外の変数値に対しては W が上記以外の[つまり W=ax 以外の]任意の値(einen beliebigen anderen Werthe)をとる」という前提と矛盾しない。[そう考える理由はこうである]。

まず、$(2m+1)/2^n$ という形を持つ x に対して W がとる値は指定されている。他方、$(2m+1)/2^n$ という形を持たない変数値に対して W がとる値は指定されていない。さて指定された方の値を二つとると、その間に W の値の無限個の集まり(eine unendliche Menge)が存在する。そのとき、指定された二つの値の間の[まだ指定されていない]値に、その無限に多くの値をあてがうことが、つねに[すなわちどの x についても]可能である。

だがこの[函]数 W は、定理[§65] の条件を満たしつつ、(すでに§46 で見たように)どの変数値に対しても連続でない、そんな関数の実例を与えている。[訳者。§95 を参照]

[「単調」(fortwährend)ということ]

§85

[定理]　すべての変数値について(allgemein)であれ、[特定の]開区間のすべての変数値についてであれ、変数値が大きくなるにつれて函数値も大きくなるような函数が存在し、逆に変数値が大きくなるにつれて函数値が小さくなるような函数も存在する。

(証明) 函数 Fx=ax において、a が正なら、大きい x には大きい W[=Fx=ax]の値が帰属する。[というのは] $x_2>x_1$ なら、a は正だから、[RZ7.§85 より] $ax_2>ax_1$、すなわち $Fx_2>Fx_1$ だからである。逆に a が負なら大きな x には小さな Fx が帰属する。なぜなら $ax_2<ax_1$、すなわち $Fx_2<Fx_1$ だからである。

§86　[単調増加と単調減少]

[定義]　Fx を x の一価(einförmig)の函数とする。すべての変数についてであれ、ある開区間(a.b)のすべての変数値についてであれ、変数値が大きくなると函数値も大きくなるのなら、この函数は「単調に増加する(fortwährend wachsen)/ 単調に上昇する(fortwährend steigen)」、あるいは「開区間(a.b)で単調に増加する/「開区間(a.b)で単調に上昇する」などと表現する。逆に、x が大きくなるとき函数値が小さくなるのなら、この函数は「単調に減少する(fortwährend abnehmen)/単調に下降する(fortwährend fallen)」、「開区間(a,b)で単調に減少する/開区間(a,b)で単調に下降する」などと表現する。

§87

[補題 1]　純然たる(lauter)可測な値 a と b を[変数値に]持つ函数があって、しかも「この函数は開区間(a,b)で単調に増加する」というのが偽(falsch)である場合、この開区間のなかに $\mu<\rho$ であるような一対(Paar)の変数値 μ と ρ をとることができて、しかもその函数値は $F\mu \geqq F\rho$ となっているに違いない。(もう一つのケースとしては、純然たる可測な値 a

と b を[変数値に]持つ関数があって、「この函数は開区間(a,b)で単調に減少する」というのが偽である場合、この開区間のなかにμ＜ρであるような一対の変数値μとρをとることができて、Fμ≦Fρとなっているに違いない。）　さらにこの場合、Fμ＞Fρなら「函数は少なくとも単調に増加するのではない」と推論できるし、Fμ＜Fρなら「函数は少なくとも単調に減少するではない」と推論できるし、Fμ＝Fρなら「W は単調に増加するのではなく、単調に減少するのでもない」と推論できる。

§88

[補題 2]　　函数 Fx は開区間(a,b)で一貫して(beständig)増加する、あるいは一貫して減少するものとし、x と x＋Δx を開区間(a,b)の一対の[変数]値とすると、F（x＋Δx）－ Fx は一貫して Δx と同符号か（増加の場合)、一貫してΔx と異符号か（減少の場合)、そのいずれかである。

§89

[定理]　　函数 Fx が開区間(a,b)で単調に増加あるいは単調に減少するとき、この函数はこの開区間ですべての[函数]値を[それぞれ]ただ一度だけとる。

（証明）なぜなら、x が開区間(a,b)でとる一対の値をμとρし、Fμ=Fρとおく。ただしμとρは異なるとし、ρの方が大きいものとする。すると§87 ゆえに、この函数は開区間(a,b)で単調に増加はせず、単調に減少もしない[ことになるが、これは前提に反する。ゆえに Fμ=Fρとなるような、互いに異なるμとρをとることはできない。]

§90

[定理]　　函数 Fx が開区間(a,b)で単調に増加するとき、Fρ>Fμ ならρ＞μでなければならない。逆に、函数 Fx が開区間(a,b)で単調に減少するとき、Fμ＞Fρ ならμ<ρ でなければならない。

（証明）前半を証明すれば十分である。Fρ>Fμだから、ρとμは一対の互いに異なる数でなければならない。さてρもμも開区間(a,b)に含まれ、それゆえ可測だから、ρ＞μかμ＜ρのいずれかが成り立つ。しかし函数は開区間(a,b)で一貫して増加するのだから、μ＞ρならFμ＞Fρとならざるを得ないが、しかしそうではないのだから、ρ＞μである。

§91

[定理]　　開区間(a,b)において一価の函数 Fx がある値から別の値に移行する(übergehen)とき、Fx はかならずこれら二つの値の間のすべての値をとるとする。さらに、順に並んだ x の三つの[変数]値（たとえばε＜μ＜ρ）があって、それぞれに対応する三つの可測値が Fε<Fμ<Fρ の関係になく Fε＞Fμ＞Fρの関係にもないとする。そのとき、この函数は開区間(a,b)の少なくともある一つの(Einen)函数値を二回とっている。

（証明）三つの可測数 $F\varepsilon, F\mu, F\rho$ が $F\varepsilon < F\mu < F\rho$ の関係になく $F\varepsilon > F\mu > F\rho$ の関係にもなく、さらに、これら三つの数のうち二つあるいは三つが同じであるケースを排除すると（そのとき定理が正しいことは自明である)、$F\varepsilon < F\mu > F\rho$ か $F\varepsilon > F\mu < F\rho$ しか残らない。

1. $F\varepsilon < F\mu > F\rho$ でしかも $F\varepsilon = F\rho$ ではないとする。すると $F\varepsilon < F\rho$ か $F\varepsilon > F\rho$ である。

前者[$F\varepsilon < F\rho$]なら、$F\varepsilon < F\rho < F\mu$ である。したがってこの函数は、値 $F\varepsilon$ が値 $F\mu$ に移行するとき、かならず $=F\rho$ という値を取らねばならない。すなわち、ε と μ の間に可測なある数 λ があって、$F\lambda = F\rho$ とならねばならない。さて λ は ε と μ の間にあるゆえ ρ とは異なるから、開区間 (a,b)に二つの数 λ と ρ があって、函数はこれらの二つの値で同じ{函数}値をとっている。

［他方］後者[$F\varepsilon > F\rho$]なら、$F\rho < F\varepsilon < F\mu$ である。したがってこの函数は、値 $F\rho$ が値 $F\mu$ に移行するとき、かならず $=F\varepsilon$ という値を取らねばならない。すなわち、μ と ρ の間にある値 π があって、$F\pi = F\varepsilon$ でなければならない。さて π は μ と ρ の間にあるゆえ ε とは異なるから、開区間(a,b)に二つの数 ε と π があって、函数はこれらの二つの値で同じ{函数}値をとっている。

2. $F\varepsilon > F\mu < F\rho$ の場合も証明は同様に行われる。

§92

[補題 1]　　開区間(a,b)で函数がある函数値から別の函数値に移行するとき、この函数 Fx はかならずこれら二つの間のすべての値を、どの値も一度だけとるものとする。そのとき、変数 x の順に並んだ三つの変数値 ε, μ, ρ にそれぞれ対応する函数値は，かならず次のいずれかの関係になければならない。すなわち $F\varepsilon < F\mu < F\rho$ か、$F\varepsilon > F\mu > F\rho$ か。

§93

[補題 2]　　開区間(a,b)に順番に並ぶ四つ以上の x の[変数]値を $\varepsilon, \mu, \rho, \psi$ ・・・とすれば（すなわち　$\varepsilon < \mu < \rho < \psi$ ・・・とすれば)、そのとき、$F\varepsilon < F\mu < F\rho < F\psi$ ・・・か、あるいは $F\varepsilon > F\mu > F\rho > F\psi$ ・・・でなければならない。

§94

[定理]　　開区間(a,b)で函数がある函数値から別の函数値に移行するときに、かならずその間の各函数値を[それぞれ]一度だけ(nur einmahl)とり、しかもその[函数]値が継続して可測であり続ける(verbleiben)ならば、この函数は開区間(a,b)で単調に増加しているか、単調に減少しているか、そのいずれかである。

（証明）　変数 x が開区間(a,b) でとる一対の値を μ と ρ とし、しかも $\mu < \rho$ とする。函数 Fx は開区間(a,b)で各[函数]値を[それぞれ]一度しかとらないから、$F\mu$ と $F\rho$ は等しい筈が

ない。ところが $F\mu$ と $F\rho$ はどちらも可測だから、$F\mu<F\rho$ か $F\mu>F\rho$ のどちらかである。さて私は、[特定の μ と ρ について] $F\mu<F\rho$ なら 「この函数は[どこを取っても]増加している」と主張し、$F\mu>F\rho$ なら「この函数は[どこを取っても]減少している」と主張する。前者のみ証明すれば十分だが、そのためには、開区間(a,b) の二つの値、例えば $x_1<x_2$ である x_1 と x_2 について、$Fx_1<Fx_2$ であることが示せれば十分である(§91)。まず、数 x_1、x_2 が μ と ρ の片方と同じであるケースと、四つの数が全部互いに異なっているケースを区別しよう。

A) 数 x_1 または x_2 が μ と ρ の片方と同じだという前提は、次の四つのケースを含む。

1. $x_1=\mu$ とする。その場合、$(x_1=\mu)<\rho<x_2$ または $(x_1=\mu)<x_2<\rho$ でなければならない。第一の場合なら、先の補題から

$$(Fx_1=F\mu)<F\rho<Fx_2$$

または

$$(Fx_1=F\mu)>F\rho>Fx_2$$

でなければならない。しかし二つ目の式は $F\mu<F\rho$ の条件に矛盾するので、前者 $(Fx_1=F\mu)<F\rho<Fx_2$ でなければならず、ゆえに $Fx_1<Fx_2$ である。また第二の場合なら、

$$(Fx_1=F\mu)<Fx_2<F\rho$$

または

$$(Fx_1=F\mu)>Fx_2>F\rho$$

でなければならないが、二つ目の式は $F\mu<F\rho$ の条件に矛盾するので、前者 $(Fx_1=F\mu)<Fx_2<F\rho)$ でなければならず、ゆえに $Fx_1<Fx_2$ である。

2. $x_1=\rho$ とする。その場合、$\mu<(\rho=x_1)<x_2$ なので

$$F\mu<(F\rho=Fx_1)<Fx$$

または

$$F\mu>(F\rho=Fx_1)>Fx_2$$

でなければならないが、二つ目の式は $F\mu<F\rho$ の条件に矛盾するので、前者 $F\mu<(F\rho=Fx_1)<Fx$ でなければならず、ゆえに $Fx_1<Fx_2$ である。

3. $x_2=\mu$ とする。その場合、$x_1<(x_2=\mu)<\rho$ なので、

$$Fx_1<(Fx_2=F\mu)<F\rho$$

または

$$Fx_1>(Fx_2=F\mu)>F\rho$$

でなければならないが、 二つ目の式は $F\mu<F\rho$ という条件に矛盾するので、前者 $Fx_1<(Fx_2=F\mu)<F\rho$ でなければならず、ゆえに $Fx_1<Fx_2$ である。

4. $x_2=\mu$ とする。その場合、

$$x_1<\mu<(\rho=x_2)$$

または

$$\mu<x_1<(\rho=x_2)$$

でなければならない。$x_1<\mu<(\rho=x_2)$ からは次の二つのいずれかが帰結する。すなわち

$$Fx_1<F\mu<(F\rho=Fx_2)$$

または

$$Fx_1>F\mu>(F\rho=Fx_2)$$

さて、$F\mu < F\rho$ であるから二つ目の式はあり得ず、ゆえに、第一の式が成り立ち、それゆえ

$Fx_1 < Fx_2$ である。[他方] $\mu < x_1 <$（$\rho = x_2$）からは次のことが帰結する。

$$F\mu < Fx_1 < (F\rho = Fx_2)$$

または $$F\mu > Fx_1 > (F\rho = Fx_2)$$

しかし二つ目の式は $F\mu < F\rho$ という条件に矛盾するので、前者 $F\mu < Fx_1 < (F\rho = Fx_2)$ でなければならず、ゆえに $Fx_1 < Fx_2$ である。

B) 四つの数 x_1, x_2, μ, ρ は互いに異なるから、以下の三つのケースのどれか一つしか起こりえない。x_1 と x_2 がどちらも開区間(μ, ρ)にあるか、どちらもその外部(außerhalb)にあるか、あるいは一つが開区間(a,b)にあり、もう一方がその外部にあるか、である

1. x_1 と x_2 がどちらも開区間(μ, ρ)にあるなら、$\mu < x_1 <, x_2, < \rho$ 以外は考えられない。
   さて§93 ゆえに、

$$F\mu < Fx_1 < F, x_2, < F\rho$$

か、あるいは $$F\mu > Fx_1 > F, x_2, > F\rho$$

しかあり得ないが、二つ目は前提 $F\mu < F\rho$ に矛盾するので前者が正しく、ゆえに $Fx_1 < F, x_2,$ である。

2. x_1 と x_2 がどちらも開区間(μ, ρ)の外部にあるときは、$x_1 < \mu < \rho <, x_2$ か、$x_1 <, x_2, < \mu < \rho$ か、$\mu < \rho < x_1 <, x_2,$ か、いずれかでなければならない。ゆえに

$$Fx_1 < F\mu < F\rho < F, x_2,$$

または $$Fx_1 > F\mu > F\rho > F, x_2,$$

でなければならない。しかし $F\mu < F\rho$ であるから二つ目は不合理であり、だから前者が正しく、つまり $Fx_1 < Fx_2$ である。

3. 数 x_1 と x_2 の一方が開区間(a.b)にあり、もう一方がその外部にあるなら、

$$x_1 < \mu < x_2, < \rho$$

または $$\mu > x_1 > \rho > x_2,$$

としか考えられない。最初の仮定 $x_1 < \mu < x_2, < \rho$ からして、

$$Fx_1 < F\mu < Fx_2 < F\rho$$

または $$Fx_1 <> F\mu > F, x_2 > F\rho$$

しか考えられないが、$F\mu < F\rho$ ゆえに、前者、すなわち $Fx_1 < Fx_2$ しか考えられない。[他方二つ目の仮定、$\mu > x_1 > \rho > x_2$ からして、

$$F\mu < Fx_1 < F\rho < F, x_2,$$

または $$F\mu > Fx_1 > F\rho > F, x_2,$$

しか考えられない。さて $F\mu < F\rho$ より、前者、すなわち $Fx_1 < Fx_2$ しか考えられない。

こうしていずれにせよ、$Fx_1 < Fx_2$ である。すなわち函数は単調増加(fortwährend wachsen)する。

§95　　[単調という条件のもとでは、中間値の定理の逆が成り立つ]

[定理]　開区間(a,b)で単調増加または単調減少する函数が、ある値から別の値に移行するときかならずその間のすべての値をとるのなら、この函数は開区間(a,b)で連続である。

(証明)　開区間(a,b)の任意の変数値を x で表わすと、当然、函数がとる値 Fx も可測数であり、また、x+Δが開区間(a,b)に収まるようにΔx をとると、F(x+Δx)も、したがって F(x+Δx)−Fx も、当然、可測数である。[なぜなら、この函数はある値から別の値に移行するときかならずその間のすべての値をとるのだから。]

そこで[F(x+Δx)−Fx という函]数を=D と置き、さらに[絶対値が] <1 である定数μをとると、μD の絶対値も<D である。この場合、Fx+μD はまさに、くだんの函数が[函数]値 Fx から出て[函数]値 F(x+Δx)に到達するときの、その到達に先立って(bevor)取るべき、開区間(Fx, Fx+D)のなかの、すなわち開区間(Fx,F(x+Δx))のなかの、[どれか]一つの数を表している。

さて函数が函数値 Fx+μD をとるような変数値を x+πΔx とおく。この場合、x+πΔx は開区間(x, x+Δx)にあり、ゆえに 0<π＜1 である。またμは限りなく小さくなることができるから、μD も限りなく小さくなることができ、ゆえに[μを十分小さく取れば] μD は＜1/N となることができる。

さて、どんなに小さい商 1/N をとっても、x のある差分=πΔx を[十分小さく]とれば、[函数値の]差分 F(x+πΔx)−Fx を＜1/N　にすることができる。そこでπを[0<π＜1 のなかで]さらに小さくとると、くだんの函数[Fx]は単調増加または単調減少する函数だったのだから、差 F(x+πΔx)−Fx も[πΔx が小さくなるのに連れて]単調に減少する。しかしこれはまさに連続性の法則が求めるところである。

[非単調な連続函数]

§96　　　[非単調な連続函数]

[定理]　a,b,c を順番に並んだ三つの数（たとえば a<b<c）とすると、次のような函数が可能である。開区間(a,b)で単調増加し開区間(b,c)で単調減少する函数であって、あるいは開区間(a,b)で単調減少し開区間(b,c)で単調増加する函数であって、しかも開区間(a,c)で継続して連続(innerhalb a und b fortwährend stetig)であるような函数があり得る。

（証明）[仮に] b が a と c の間にないとしたらどうなるだろうか。b が a と c の間にないなら、[言い換えると] a=c か、b が a と c の小さい方より小さいか、a と c の大きい方より大

きいか、だとしたらどうなるだろう。[しかし]その場合、[題意が求めるように]一つの函数が開区間(a,b)で増加し（または減少し）、開区間(b,c)で減少する（または増加する）というのは、もちろん背理(ungereimt)である。なぜなら第一の場合(つまり a=c の場合)、限界 a,b と限界 c,b に違いはないし、第二の場合には、第一の（または第二の）限界の間にあるすべての数は、第二の（または第一の）限界の間にもあるからである。

しかし b が a と c の間にあるなら、開区間(a,b)にある x の値が同時に開区間(b,c)にあることはない。ゆえに[この場合]、函数が、開区間(a,b)と開区間(b,c)で、まったく別の法則(Gesetz)に従うことは可能なのである。ちょうど、函数が前者では増加し後者では減少する、あるいはその逆であるという具合にである。さて函数 $ax-x^2$ という例はまさに、上記のように振る舞う函数が存在することを、しかも a から c にかけて(von a bis c)継続して連続性の法則に従いながらそのように振る舞う函数が存在することを、証明している。[なぜなら、まず]§81 ですでに確認したようにそれは有理関数であり、すべての x の値に対して連続であり続ける。そこで a が正とすると、関数は x=0 から x=a/2 にかけて単調増加し、x=a/2 から x=a にかけて単調減少する。すなわち、x と x＋Δx を開区間(0,a/2) の一対の値とすると、差 $F(x+\Delta x)-Fx=[a(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^2]-[ax-x^2]=(a-2x-\Delta x)\Delta x$ は、Δx が正で $(a-2x-\Delta x)$ が正なら、つまり x が正で $\underline{x<a/2}$ で $\underline{x+\Delta x<a/2}$ なら、正である。(そのとき[二つの不等式の辺々の]和 $2x+\Delta x$ が$<a$ だからである)。ゆえに、x＋Δx が x より大きく、両者が開区間(0,a/2)にあるなら、F(x+Δx)は Fx より大きい。すなわち函数は開区間(0,a/2)で増加する。

しかし $x>a/2$ とし、さらに $x+\Delta x>a/2$ とすると、和をとって $2x+\Delta x>a$ であり、ゆえに差分$(a-2x-\Delta x)$ は負である。したがって $F(x+\Delta x)<Fx$ 、すなわち函数は減少する。

同じ開区間でちょうど逆の振る舞いをする函数の例、すなわち開区間(0,a/2)で減少し、開区間(a/2,a)で増加する函数の実例としては、x^2-ax $(a>0)$がある。なぜならこの場合、差分　$F(x+\Delta x)-Fx=(-a+2x+\Delta x)\Delta x$ は、x と x+Δx が開区間(0,a/2)にあるとき負であり、また $x>a/2$ かつそれゆえ $x+\Delta x>a/2$ であるなら、正だからである。

これら二つの函数の上昇と下降を直観化したければ、a に特定の数たとえば 8 を選び、x の個々の値に対して　$ax-x^2$ と x^2-ax を計算してみると良い。例えば次の表のようになる。

x	$8x-x^2$	x^2-8x
0	0	0
+1	+7	−7
+2	+12	−12
+3	+15	−15
+4	+16	−16
+5	+15	−15
+6	+12	−12

＋7　　＋7　　−7

＋8　　0　　0

§97　　[付近(um ~ herum)より大きい値・付近より小さい値]

[定理]　函数 Fx は開区間(a,b)で単調増加し開区間(b,c)で単調減少し、[変数]値 b の付近で(um den Werth b herum)連続とする。そのとき、[正の]ωを十分小さくとり、それを[正のまま]限りなく小さくするとき、函数値 Fb は F(b±ω)という形を持つどの値よりも大きい。逆に、函数 Fx が開区間(a,b)で[単調]減少し開区間(b,c)で[単調]増加するなら、[そして変数値bの付近で連続とすれば]､値Fb はF(b±ω)という形を持つどの値よりも小さい。

（証明）前半を証明すれば足りる。ωがある[正の]値から始めて[正のまま]限りなく小さくなるとき b−ωは増加するが、Fx が開区間(a,b)で単調増加する以上、そのとき F(b−ω)の値も単調増加する筈である。また［ωがある正の値から始めて正のまま限りなく小さくなるとき］b＋ωは減少するが、Fx が開区間(b,c)で単調減少する以上、そのとき F(b＋ω)の値も単調増加する筈である。ところで[前提より]函数は[変数]値 b の付近で連続であるから、[連続の定義に照らして、ωが正のまま 0 に向けて小さくなるとき] F(b±ω) −Fb[の絶対値]は限りなく[0 に向けて]減少しなければならない。

そこから、値 Fb は、F(b±ω)という形を持つどの値よりも大きくなければならないことが導かれる。なぜなら、[仮に]ωのある[正の]値に対して Fb が F(b−ω)より小さいとすると、ωをさらに[正のまま]小さくしても､[F(b−ω)が増加する以上]、差 F(b−ω)−Fb は [連続の定義が求めるように 0 に向けて]限りなく減少することができないからである。

またωのある値に対して Fb が F(b+ω)より小さくなるとすると､ωがさらに[正のまま]小さくなっても、差 F(b+ω)−Fb は限りなく小さくなることはできない。なぜなら、そのとき F(b+ω)は[むしろ]増加するからである。

ゆえに Fb> F(b−ω) かつ Fb> F(b+ω) でしかありえない。

§98　　[その付近(um~herum)での最大・最小]

[定義]　連続函数か不連続函数かを問わず、次のように定義する。函数 Fx がある[特定の]変数値 x=b においてとる値[Fb]が、ωをある[正の]値から始めて[正のまま]限りなく小さくしたとき F(b±ω)がとるどの値よりも大きいなら、函数値 Fb を「最大値(ein größter Werth)」､「最大(ein Größtes, ein Maximum)」などと呼ぶ。また Fb が、ωをある値から始めて限りなく小さくしたとき F(b±ω)がとるどの値よりも小さいなら、函数値 Fb を「最小値(ein kleinster Werth)」､「最小(ein Kleinstes, ein Minimun)」などと呼ぶ。両方の値を併せ含む言葉は「極値(Äußerste (Extrema))」であり、それは Busse が提案した「卓越値(Eminenzien)」よりはましだが、私はこの言葉 [極値]を使わないので、[最大と最小の]両方を併せ含む言葉はないことになる。

ただ次のような特殊なケースがある。「ωを正として、F(b＋ω)> Fb は成り立つが F(b−

ω)>Fb が成り立たない場合」や、「ωを正として、F(b－ω)> Fb は成り立つが F(b＋ω)>Fb が成り立たない場合」がある。ωを負にとっても同様である。しかしこういうことが起こる理由は二通りあって、一つは、函数が[第一の場合なら] b－ωで、[第二の場合なら]b＋ωで、可測値を持たないか、いやそもそも[函数]値を持たない場合である。もう一つの理由は、ある[正の]ωから始めて、それより小さいすべての[正の]ωについて、[第一の場合なら] F(b－ω)=Fb であり、[第二の場合なら] F(b＋ω)=Fb である場合である。

さてまさにそうした状況において、x の正の増加分に応じて関係 F(b+ω) ≧Fb が成り立っていたり、また x の負の増加分に応じて F(b−ω) ≦ Fb が成り立っているとき、{函数}値 Fb を「半最大(ein halbseitiges Maximum)」や「片側最大(ein einseitiges Maximum)」、また「半最小(ein halbseitiges Minimum)」や「片側最小(ein einseitiges　Minimum)」などと呼ぶ。それ以外にも、最初に説明した最大と最小を「完全(vollständig)」、「全面(ganz)」、「両側(beiderseitig)」などと形容する。ただ端的に「最大・最小」と言うとき、私は「完全最大」と「完全最小」のことを考えている。

§99　　　[大域的最大・最小(§60)と局所的最大・最小(§98)の区別]

[定理]　前節[§98]で語られた意味での函数 Fx の「最大値」または「最小値」は、かならずしも§60 の意味で函数 Fx が閉区間[a,b]でとる「最大値」または「最小値」に一致しない。このことは、後者の函数の区間が[閉区間でなく]開区間(a,b)であっても言える。ただし、[ある変数]値 m を含むような一対の近接した(nahe liegende)[二つの] 限界αとβをとって、Fm が閉区間[α,β]での Fx の最大値または最小値になるようにすることは、いつでも可能である。しかしそうではなくて、「閉区間[a,b]で Fx がとる最大値または最小値」が、つまり「§60 の意味でそれより大きい値またはそれより小さい値がない、という意味での最大値または最小値」が、かならず(immer)、§98 の意味での最大(ein Größtes)あるいは最小(ein Kleinstes)になるのは、次の場合に限る。それは、[Fx が最大値または最小値をとるとされる」変数値 m とそれを間に挟む一対の[ある]数αとβがあって、Fx の値がその閉区間[α,β]で一定値をとる場合である。

（証明）

1. [先ほど定理で]説明した意味での[局所的な]最大(ein Größtes)または最小(ein Kleinstes)である値が、そのまま、函数が x=a から x=b にかけて(von a bis b)とるすべての値のなかでの[大域的な]最大値または最小値(der größte oder kleinst Werth)ではないことは明白である。なぜなら、前者に求められていることは、ωをある値から始めて限りなく減少させるとき、Fm が F(m±ω)という形を持つすべての値よりも大きいまたは小さいことであるが、このことは、m より十分に大きくまたは十分に小さくとった x の値に対応する Fx の函数値が、Fm より大きいときでも（最大の場合)、Fm より小さいときでも（最小の場合)、起こりうるからである。たとえば、函数 Fx が x=a で値 10 をとり、x=b で値 5 をとり、それ以外の x の値に対して=1 だとすると、Fm=5 はもち

ろん前節の意味での[局所的な]最大であるが（なぜなら $5>1$ だから）、しかし Fm が $x=a$ から $x=b$ にかけてとる[大域的な]最大値ではない（なぜなら最大値は$=10$ なのだから）。

2. しかしそうは言っても、数 m を含みしかも互いに近接する限界αとβを見出して、この限界において、Fm が、函数 Fx が $x=\alpha$ から $x=\beta$ にかけてとるすべての値の[局所的な]最大値あるいは最小値になるようにすることができるというのも、正しい。なぜなら、ωとそれより小さな値について、Fm が最大の場合なら $F(m-\omega)<Fm>F(m+\omega)$ という関係が、また Fm が最小の場合なら $F(m-\omega)>Fm<F(m+\omega)$ という関係が成り立つような、そんな十分に小さいωがあるから、二つの数 $m-\omega$ と $m+\omega$ を求める[αとβというあの]一対の数に当てればよいのである。
3. Fm を函数 Fx が $x=a$ から $x=b$ にかけてとる値の最大値または最小値とする。この場合、最大値または最小値とは、他のどの値もこの値よりも大きくないまたは小さくないという意味である。しかしこのことから、Fm が§98 の意味で[局所的に]最大だとか最小だとか言えるわけではない。なぜならこの函数が m を含む開区間(α,β)で一定値をとる場合があるからである。このこと[つまり m を含む開区間(α,β)で一定値をとること]は、§60 の意味での[大域的な]最大値または最小値の概念に矛盾しないが、§98 の意味での極値[Äußerste]の概念には矛盾するのである。
4. しかしそのような[つまり「一定値」のような]状態がないとすれば、§60 の意味での[大域的な]最大または最小という呼称が表わす値が、極値でもあることに疑問の余地はない。なぜなら、$m\pm\omega$が開区間(a,b)に含まれるようにωを十分小さく取れば、Fm があの函数の[大域的な]最大値なら、当然、$F(m-\omega)<Fm>F(m+\omega)$ であり、Fm がその[大域的な]最小値なら $F(m-\omega)>Fm<F(m+\omega)$ である。なぜなら、それを否定することは、あるωがあって、前者なら $F(m-\omega)>Fm$ または $F(m+\omega)>Fm$ であり、後者なら、$F(m-\omega)<Fm$ または $F(m+\omega)<Fm$　となるが、その場合、前者では Fm は明らかに Fx が $x=a$ から $x=b$ にかけてとる最大値でなくなり、後者では Fm は明らかに Fx が $x=a$ から $x=b$ にかけてとる最小値でなるからである。しかし $F(m-\omega)<Fm>F(m+\omega)$ または $F(m-\omega)>Fm<F(m+\omega)$ であり、この関係はωが限りなく減少しても成り立つから、前者なら Fm は§98 の意味で[局所的に]最大であり、後者なら同じく最小である。

§100　　　[閉区間の場合]

[定理]　　函数が閉区間 $[a,b]$で連続かつ単調増加（または連続かつ単調減少）なら、函数が閉区間 $[a,b]$でとる値のうちで、Fa が最小で Fb が最大（または Fa が最大で Fb が最小）である。

（証明）ここでも前半だけを証明しよう。開区間 $[a,b]$の任意の変数値を x で表わすと、証明すべきは $Fa<Fx<Fb$ である。しかし$\omega<(b-a)$とする限り、$a+\omega$ と $b-\omega$ は開区間 (a,b) の一対の値になるから、x が開区間$(a+\omega,b-\omega)$に納まるようにωを[正の範囲で]十分に小

さく取れば、元の函数が単調増加する函数である以上、$F(a+\omega)<Fx<F(b-\omega)$でなければならない。さて$F(a+\omega)$と $F(b-\omega)$は、ωが限りなく減少するにつれて、[それぞれ] Fa と Fb に限りなく近づく。したがって $Fa<Fx<Fb$ でもなければならない。[ゆえに函数が閉区間[a,b]でとる値のうちで、Fa が最小で Fb が最大である]。

[交代する非単調な連続函数]

§101　　[函数値をめぐる交代性(第二種函数からの実例)]

[定理]　可測な二つの限界 a と b からなる開区間(a,b)のすべての変数値において、函数 Fx は連続性の法則に従うものとする。この開区間(a,b)に無限個の値 x_1,x_2,x_3,x_4・・・を順番に大きくあるいは順番に小さくなるように設定するだけで、それに対応する Fx の函数値たちが、「ある定数 M 以上（$\gtrsim M$）になること」と「それと異なる定数 m 以下（$\lesssim m$）になること」を、交互に繰り返す(abwechselnd)ようにすることができる。あるいは、正値と負値を交互にとるように、すなわち（よく言われるように）無限回その符号が交代する(wechseln)ようにできる。

（証明）

(1) [そのような関数の実例を与えるために]、まず次のようにおく。

$0<x\leqq\frac{1}{2}$の値に対して、数 $W=x$ とおき、

$\frac{1}{2}<x\leqq\frac{3}{4}$の値に対して、$W=(3-4x)/2$、

$\frac{3}{4}<x\leqq\frac{7}{8}$の値に対して、$W=(4x-3)$、

$\frac{7}{8}<x\leqq\frac{15}{16}$の値に対して、$W=(15-16x)/2$、　　そして一般に

$(2^{2n-1}-1)/2^{2n-1}<x\leqq(2^{2n}-1)/2^{2n}$ の値に対して、$W=(2^{2n}-1-2^{2n}\cdot x)/2$

$(2^{2n}-1)/2^{2n}<x\leqq(2^{2n+1}-1)/2^{2n+1}$ の値に対して、$W=2^{2n}\cdot x-2^{2n}+1$　とおく。

すぐわかるように、開区間（0,1）のすべての x の値についてこの函数は連続性の法則に従っている。なぜなら[まず]、0 と$\frac{1}{2}$の間(zwischen)で、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$の間で、$\frac{3}{4}$、$\frac{7}{8}$の間で・・・

と[それぞれの]間で[函数が]x について連続であることは、[函数]W がこれらの値に対していつも(durchgängig) a+bx という形をとっていることから直ちに明らかである(§7)。

また$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{7}{8}$、$\frac{15}{16}$・・・$(2^{2n-1}-1)/2^{2n-1}$、$(2^{2n}-1)/2^{2n}$ という無限列をなす x の[個々の]値においても、 [函数]W が[それぞれ] 連続性を有することは、上の一連の場合分けから二つの連続するケース場合を選び、[一つの場合の x を増やし、他の一つの場合の x を減らすことによって] x の差を限りなく減少させたとき[二つの函数] 値が限りなく近づくことから知られる。

ところで $x=(2^{2n-1}-1)/2^{2n-1}$ のとき $W=\frac{1}{2}$であり、$x=(2^{2n-1}-1)/2^{2n-1}+\omega$ のとき $W=\frac{1}{2}-2^{2n-1}\cdot\omega$ であり、$x=(2^{2n}-1)/2^{2n}$ のとき $W=0$ であり、$x=(2^{2n}-1)/2^{2n}+\omega$のとき $W=2^{2n}\cdot\omega$ であるから、この函数が $\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{7}{8}$、$\frac{15}{16}$・・・$(2^{2n-1}-1)/2^{2n-1}$、$(2^{2n}-1)/2^{2n}$ という列をなす値について、$\frac{1}{2}$と 0 を交互に(abwechselnd)とることが知られる。さて無限の集まり(Menge)をなす x のこれらの値は、ずっと(fortwährend)開区間(0,1)に留まり続けるから、数 W は定理の前半で前提された条件を充たしていることがわかる。すなわちこの例では、$\frac{1}{2}$が M で、0 が m で、0 が a で、1 が b なのである。

(2)しかしこれで定理後半の証明も終わっている。W は開区間（0、1）で無限回にわたって交互に$\frac{1}{2}$と 0 をとるのだから、$W-\frac{1}{4}$ は、まさにこの開区間で無限回にわたって $\frac{1}{4}$と$-\frac{1}{4}$を、つまり正と負を交互にとる数を表している。

§102　　[函数値をめぐる交代性（第一種函数からの実例）]

[注解]　　数学に通じた者は次のことをすぐ理解する。前節の実例[は序文にいう第二種函数だったが、しかしそれ]だけではなく、変数の特定の値とまったく独立な一個の法則(ein einziges Gesetz)によって限定可能な函数[すなわち第一種函数]もまた、この定理が述べる特性を持つ。たとえば sin log(1−x)は開区間（0,1）で +1 と−1 という値を無限回とる。

§103　　　[区間の問題]

[補題]　　次のことに注意されたい。上の定理[§101]は函数 Fx の連続性を開区間(a,b)のすべての変数値について前提しているが、それが「a と b で決まるこの開区間[の全体]で連続でなければならない(müssen)」という趣旨なのか、それともただ「この開区間[の全体]で連続であっても差し支えない(können)」という趣旨なのか、この点について定理は何も語っていない。

§104　　　[無限回にわたる交代]

[定理]　開区間（a,b）のすべての変数値において、函数 Fx は連続性の法則に従うものとする。もし函数 Fx が、「函数値が定数 M 以上(≧)になり、別の定数 m 以下(≦)になる」ことを、交互に(abwechselnd)、しかも無限回にわたって(unendliche Mahle)行うのなら、この函数は開区間(M,m)のすべての任意の[函数]値を無限回とっている。またこの函数で、符号が無限回にわたって交代するなら、函数は[函数]値 0 を無限回とっている。[訳者。以上を「定理の前半」とする]。

さらにいずれの場合も、[そのような函数値をとる] どの変数値 x もその「次(nächst)」を持つ。つまりどの変数値 x も、他にもっと近い変数値が見つからないような、[特別に近い]変数値を持つ。[訳者。以上を「定理の後半」とする]。

（証明）　定理の前提より、[すなわち一定数 M より≧となり、別の一定数 m より≦となることを、無限回にわたって交互に繰り返すという前提から、あるいは函数が 0 を無限回とるという前提から]、当然、次のような[変数]値の列(Reihe)が見つかる。すなわち、全部の項が開区間(a,b)にあり、後続の値は先行する値より大きく（あるいは小さく)、しかもこれらの値に対応する函数値 Fx が、第一の場合なら、≧M と≦m を交互にとり、第二の場合なら、正値と負値を交互にとるような、そのような[変数値の]列が見つかる。さて§65 より連続函数は値 M から値 m に移行するとき、かならずその間のすべての値を少なくとも一度はとるから、M と m の間 (zwischen)の任意の数を C とすると、第一の場合なら、いま挙げた x の値の列のどの二つの項の間にも少なくとも一つの値 x があって、この x において Fx は値 C をとっている。[以上で定理前半の証明は終わり]。

さて[函数値]Fx が交互に≧M そして≦m となるような、x の[変数]値の無限の集まり(Menge)があるのだから、「その間で(dazwischen)Fx が値 C をとるような x の値の無限の集まり」もなければならない。だが§54 よりこれらの値はどれもその「次の(nächst)」値を持つ。

また同じことは符号が無限回にわたって交代する第二の場合にも言える。数 0 は正の値と負の値の間(zwischen)の数だからである。[以上で定理後半の証明は終わり]。

§105　[閉区間と開区間]

[定理]　次のようにして無限個の[変数]値の集まり x_1、x_2、x_3、・・・（gewisse ～Werthe ～ von unendlicher Menge)をとることができる場合を考えよう。すなわち函数 Fx について、a と b という可測な限界からなる開区間(a,b)において、無限個の[変数]値の集まり x_1、x_2、x_3・・・に対する函数値たちが、ある定数 M 以上の(≧)値と、M とは異なる定数 m 以下の(≦)値を、交互に(abwechselnd)とるようにすることができて、しかもこの交代(Wechsel)が x_1、x_2、x_3、・・・という[変]数[値]の無限の集まりに呼応して無限回にわたって繰り返される場合を考える。そのとき私は、「この関数は閉区間[a,b](einschließlich von a bis b)では、連続性の法則に従わない」と主張する。私が主張するのは[正確には]こうである。「この関数は、x=a で不連続(unstetig)か、x=b で不連続か、開区間(a,b)の（複数かどうかは別として）一つの変数値で不連続か、そのいずれかである」と。

（証明） [題意より] Fx に M 以上の値と m 以下の値を交互に(abwechselnd)とらせる無限個の x の[変数]値 x_1,x_2,x_3・・・は、すべて可測な開区間(a,b)にある。そこで[函数 Fx が閉区間[a,b]で連続であると仮定すると]、次のようにできる筈である。まず、望むだけ狭めることができる一対の限界で、これらの変数値 x_1,x_2,x_3・・・のすべてを囲う(einschließen)か、さもなくば(oder)、[やはり]望むだけ狭めることができる一対の限界で、上記の[無限個の]変数値たちの一部分(Theil)を、ただしそれ自体、無限個の集まりを含むような一部分を囲うか、そのどちらかが[連続性の仮定ゆえに]できる筈である。そこで限りなく小さくなる絶対値をωで表わせば、この限界[のなす開区間]は（a, a+ω）か、(b, b−ω）か、(c, c±ω）か（ただし c は開区間 (a,b)にある)、そのいずれかということになる。

［しかし、いまから見るように］第一の場合は、函数は x=a およびその正の増加(Zuwachs)おいて不連続、第二の場合は、x= b およびその負の増加において不連続、第三の場合は、x= c において不連続となるだろう。[すなわち[閉区間[a,b]で連続という仮定に反することになるだろう]。第一の場合を証明すれば十分である。

[まず Fx が x=a で連続だとすれば]、Fx に M 以上の値と m 以下の値を交互にとらせる[変数]値たち x_1,x_2,x_3・・・は、[変数]値 x=a の近く(Nähe)で非常に稠密に(dicht)集積しているので(angehäuft)、[先ほどの前提ゆえに]ωをどんなに小さくとっても、これらの変数値の[一部である]無限の集まりが a と a+ωという二つの限界に含まれる(sich einschließen lassen)だろう。[ところが Fx は M 以上の値と m 以下の値を交互にとるのだから]、 たとえωを限りなく減少させたところで、差 F(a+ω) − Fω は連続性の法則の[限りなく減少せよという]命令に明らかに従わない。[なぜなら]仮に、十分に小さいωについて先の差の絶対値が$<\frac{1}{N}$であり、ωを減少させてもそうであり続けるとしよう。しかしそれでも、小さいωに対してさらに小さい二つのωが取れて、一方について F(a+ω）≧M で、他方について F(a+ω）≦m となるようにできるだろう。すなわち、それぞれをω_1とω_2で表わせば、F(a+ω_1) ≧M かつ F(a+ω_2) ≦m とできるだろう。したがって $F(a+\omega_1)-F(a+\omega_2) \geqq (M-m)$。しかし[他方で]連続性の法則によれば、$F(a+\omega_1)-Fa<\frac{1}{N}$ かつ $F(a+\omega_2)-Fa<\frac{1}{N}$ でなければならず、ゆえに結局 $F(a+\omega_1)-F(a+\omega_2)<\frac{2}{N}$ でなければならないが、これは $F(a+\omega_1)-F(a+\omega_2)\geqq (M-m)$と矛盾する。ゆえに Fx は x=a においては連続でない。云々。

§106

[定理] ［しかし前節の定理にも拘らずこういうことがある]。閉区間[a,b]のすべての変数値において連続性の法則に従う函数であっても、[条件次第では] 開区間(a,b)で無限回にわたって(unendliche Mahle)交互に上昇と下降を繰り返すことがあり得る。その条件の一つは、

「函数の最大たちと最小たちの絶対値が無限に増加することはない」であり、他の一つは「xが[どこかに向かって]増え続けるまたは減り続けるとき、函数が交互にとる最大値と最小値の差(Unterschied)が限りなく小さくなる」である。

（証明） どの変数値xに対しても、iを十分に小さくとりさえすれば開区間(x, x+i)または(x, x−i)で単調増加あるいは単調減少にできて、[さらに]その変数値において連続でもあるような、そんな[函数の]実例なら容易に示すことができる。

しかし[こんな函数はどうだろうか]。[変数] xが開区間(a,b)で増え続けるあるいは減り続けるとき、[函数値が]上昇と下降を無限回にわたって交互に繰り返す[ので、どんな小さい区間をとっても単調増加にも単調減少にもできないような]函数はどうだろうか。[こんな函数は連続であり得るのだろうか]。

まず次のような[一連の条件を充たす]無限個の変数xの値の集まり x_1,x_2,x_3,x_4・・・・が存在しなければならない。すなわち、[第一に]どの値も開区間(a,b)にあること。[第二に] 前の値より後の値の方が大きい（または小さい）こと。さらに[第三に]、ある二つの[§104の意味で]隣接(nächst)する値[の対]について、Fx がこの二つの値の開区間で増加（または減少）し、その次の対については逆にこの二つの値の開区間で減少（または増加）するということ。またそれゆえ[最後に]、Fx が値 x_1,x_2,x_3,x_4・・・・でとる[函数]値たちが最大と最小であるということ。以上の諸条件を満たす変数xの値の無限個の集まり x_1,x_2,x_3,x_4・・・・が存在しなければならない[ことは、本節までの議論から明らかである]。

ところがすでにすでに[§105 ?]確認したように、以上の内容から次のことが導かれる。すなわち、 x=a という[変数]値のそば(bey)であれ、x=b という[変数]値のそばであれ、あるいは x の開区間(a,b)の一つまたは複数の[変数]値のそばであれ、そのどこかに非常に多くの(so viele) x_1,x_2,x_3,x_4・・・・が繋がりながら集積するのだから(aneinander häufen)、その結果として、これら[a,b,c]の値のどれか一つの値と、別の[ある]変数という[二つの]限界は、いくら望むだけ両者を互いに近づけても、[それでも]その間に(zwischen)x_1,x_2,x_3,x_4・・・・の無限個の集まりを含んでしまうのである。

だからxが、あのどちらかの値の一つであろうと[つまりaであろうとbであろうと]、あるいは複数のこれらの値[x_1,x_2,x_3,x_4・・・・]の一つであろうと、いずれにせよそれをcと表記するなら（そのとき c は=a か、=b か、c が開区間(a,b)にあるか、のいずれかであるが)、そのとき、Fx が開区間(c,c+i)あるいは開区間(c, c−i)で単調増加あるいは単調減少すると言えるほど、充分に小さいiは存在しない。[なぜなら開区間(c, c−i)でいくらiを小さくしても、[題意より]函数はそのなかで増加と減少[の交代]をやめないからである]。

このことは当然、x=c における函数 Fx の連続性を脅かす。実際、もし最大と最小がその絶対値において限りなく増加するなら、函数は連続ではありえない。なぜなら[本節の定理は連続性という]条件を§60と共有するにも拘らず、閉区間[a,b]のすべての[変数]値について、§60で言われた意味での<u>最大</u>か<u>最小</u>が[§60に反して]見つからない[のは、ここでは最大と最小がその絶対値において限りなく増加するとされている]からである。だから、最大

と最小が[それぞれ絶対値において]ある一つの可測な値を超えないことが必要なのである。
しかし前節の結果はこうだった。すなわち、Fx が無限回にわたって交互にとる最大が総じてある定数 M 以上であり、またその最小が総じてある定数 m 以下であり続ける(verbleiben)場合、函数の連続性が不可能になる可能性が依然として残る、と。ところが本節の定理ではそうではなくて(dagegen)、「最大と最小の差(Unterschied)が限りなく減少する」という前提が[新たに]加えられていて、この前提ゆえにくだんの函数は x=c において連続性に必要な条件を充たすのである。

なぜなら、たしかにどのωについても、$F(c\pm\omega_1)$が最大になるようなさらに小さいω_1が見つかり、また $F(c\pm\omega_2)$が最小になるようなさらに小さいω_2も見つかるだろうし、前者は元の値$F(c\pm\omega)$より大きく、後者は元の値$F(c\pm\omega)$より小さいが、このことは[いまから述べるように]、さらにωを小さくとったとき、差$F(c\pm\omega)-Fc$が $<1/N$ となり、そしてそうであり続けることを妨げないからである。というのは、小さくとったωに対応する[函数値の]すべての最大と最小の差が$<1/N$であり続ける(verbleiben)ように、そうなるようにωを小さくとっておきさえすれば、$Fc<F(c\pm\omega)$である場合、ωをさらに小さくしたところで、差については$F(c\pm\omega)-Fc>F(c\pm\omega_1)-Fc$ とはなり得ないし、$Fc>F(c\pm\omega)$である場合、ωをさらに小さくしたところで、差については$F(c\pm\omega)-Fc>F(c\pm\omega_2)-Fc$ とはなり得ないからである。ゆえに $F(c\pm\omega)-Fc$ はずっと(fortwährend) $<1/N$ であり続ける。

（実例）次のような法則に従って x に依存する[函]数 W を考えよう。すなわち、

$x=0$ から $\frac{1}{2}$ では、 $W=x$

$x=\frac{1}{2}$ から $\frac{3}{4}$ では、 $W=1-x$

$x=\frac{3}{4}$ から $\frac{7}{8}$ では、 $W=x-\frac{1}{2}$

$x=\frac{7}{8}$ から $\frac{15}{16}$ では、 $W=\frac{5}{4}-x$

$x=\frac{15}{16}$ から $\frac{31}{32}$ では、 $W=x-\frac{5}{8}$ 等々。 一般に

$x=(2^{2n}-1)/(2^{2n})$ から$(2^{2n+1}-1)/(2^{2n+1})$では、 $W=x-(2^{2n}-1)/3\cdot(2^{2n-1})$ であり、

$x=(2^{2n+1}-1)/(2^{2n+1})$ から$(2^{2n+2}-1)/(2^{2n+2})$では、 $W=(2^{2n+2}-1)/3\cdot(2^{2n})-x$ であり、

最後に、$x=1$ で $W=1/3$ とする。

すぐ分かるように、この函数は開区間(0,1)で無限回にわたって上昇と下降を繰り返す。たとえば W の値が $W=x-(2^{2n}-1)/3\cdot(2^{2n-1})$という形を持つなら、x が増加するとき W は増加し、W の値が $W=(2^{2n+2}-1)/3\cdot(2^{2n})-x$ という形を持つなら、x が増加するとき W は減少する。

数列　0. $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{7}{8}$. $\frac{15}{16}$. $\frac{31}{32}$. $\frac{63}{64}$……　. $(2^{2n}-1)/(2^{2n})$. $(2^{2n+1}-1)/(2^{2n+1})$　に対応する W の値は次のような数列、すなわち

0.　$\frac{1}{2}$.　$\frac{1}{4}$.　$\frac{3}{8}$.　$\frac{5}{16}$.　$\frac{11}{32}$.　$\frac{21}{64}$……　. $(2^{2n}-1)/(3\cdot 2^{2n})$.　$(2^{2n+1}+1)/(3\cdot 2^{2n+1})$

m.　M.　m.　M.　m.　M.　m.　　　　　　m.　　　　　　　　　M

をなすが、これは活字(m,M)で示したように最小と最大を交互にとっている。しかし連続する二つの値の差、$(2^{2n+1}+1)/(3\cdot 2^{2n+1})$ － $(2^{2n}-1)/(3\cdot 2^{2n})$　は n の増加とともに限りなく減少するから、このことはくだんの函数が閉区間[0,1]で連続であることを妨げない。[なぜなら、まず] x=0 での連続性は明らかであり、開区間(0,1)のすべての[変数]値での連続性も明らかである。ところが値 x=1 で W＝1/3 と置いたのだから、くだんの函数は x=1 でも連続である。なぜなら、[x が 1 に限りなく近づくとき、差 $F(1-\omega)-1/3$ は限りなく減少するからである。と言うのは、開区間(0,1)のどの値においても、つまりどの[変数]値 $1-\omega$ についても、次の二つの一般的な方程式、　$W=x-(2^{2n}-1)/(3\cdot 2^{2n-1})$　か $W=(2^{2n+2}-1)/(3\cdot 2^{2n})-x$
のどちらかが成り立つ筈だから、そのとき $F(1-\omega)-1/3$ は、n を限りなく大きくすると、

$1-\omega-(2^{2n}-1)/(3\cdot 2^{2n-1})-1/3$　　か　　$(2^{2n+2}-1)/(3\cdot 2^{2n})-1+\omega-1/3$

のどちらかの形を持つ。しかしここでどちらの表現も限りなく減少する。というのは、第一の表現は　$=+1/(3\cdot 2^{2n})-\omega$ であり、第二の表現は　$=-1/(3\cdot 2^{2n})+\omega$ だからである。

§107　　[実例]

[注解]　　[§106 で存在が証明された函数であって、しかも]簡単な代数的表現(algebraischer Ausdruck)を持つ函数の例としては、$(1-x)^2 \sin\log(1-x)$を挙げることができる。この関数は閉区間[0,1]のすべての[変数]値において連続で、しかも、開区間(0,1)に最大値と最小値[を与える変数値]の無限個の集まり(Menge)があって、しかしその最大値と最小値は§101 の[実例における 0 や 1/4 の]ように定数ではなく、[むしろその]最大値たちと最小値たちはそれぞれ(selbst)限りなく減少するのである。

[訳者。$(1-x)^2 \sin\log(1-x)$が閉区間[0,1]で連続というのはおかしいので、全集版の編者は f(1)=0 を補うことを提案している。]

§108

[補題]　　ゆえに次のことは函数の連続性と齟齬しない。すなわち、函数の変数 x が a から b に進むとき、前より大きくなったり前より小さくなったりという交代を無限回にわたって繰り返すような[函数]値の無限列 $Fx_1. Fx_2. Fx_3$・・・が形成されることは、函数の連続性と齟齬しない。また、その値が無限回にわたって符号を変えること、つまり正になったり負にな

ったりすることも、函数の連続性と齟齬しない。ただし[それには条件があって]、第一の場合については、差たち　Fx_2-Fx_1, Fx_3-Fx_2. Fx_4-Fx_3・・・がその絶対値において限りなく減少する必要がある。第二の場合については、[函数]値自体 Fx_1.Fx_2.Fx_3・・・が、その絶対値において、限りなく減少する必要がある。もしそうでなければ、Fx の最大値(あるいは正の値)と最小値（あるいは負の値）の差が、あの定理が求めるように、限りなく小さくはならないのである。

§109

[補題]　　定理[§106]で扱った連続函数が、 x=c において[訳者。定理§106 の証明を参照]、つまりその近くに(in dessen Nähe)函数の無限個の最大値と最小値が見出されるような変数値において、最大値[の一員]をとっているのか、最小値[の一員]をとっているのか、そのどちらでもないのかは個別の事情に左右される。その定理に添えた例[§106] では、Fc=1/3 であり、それは、最大[の一員]でもなければ最小[の一員]でもない[ケースである]。というのは、最大はすべて $(2^{2n+1}+1)/(3\cdot 2^{2n+1})>1/3$　であり、最小はすべて　$(2^{2n}-1)/3\cdot 2^{2n} < \frac{1}{3}$ だからである。この函数では、最大がますます小さくなり、最小がますます大きくなることによってのみ、両者は限りなく近づいている。[すなわちこの場合、1/3 が最大または最小のいずれかであることを要さない]。

しかし両者が無限に接近するケースとしては、[前段のケース以外にも]順に並ぶ最大たちと順に並ぶ最小たちが、どちらも単調に大きくなり（あるいは単調に小さくなり）、最後に Fc が最大[最大の最大]になる（あるいは Fc が最小[最小の最小]になる）ケースも、当然ある。たとえばこんな函数を考える。

$x=0$ から $x=\frac{1}{2}$ にかけて、値は 0 から $\frac{1}{2}$ に単調に上昇し、

$x=\frac{1}{2}$ から $x=\frac{3}{4}$ にかけて、値は $\frac{1}{2}$ から $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ に単調に下降し、

$x=\frac{3}{4}$ から $x=\frac{7}{8}$ にかけて、$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ から $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ に上昇し、

$x=\frac{7}{8}$ から $x=\frac{15}{16}$ にかけて、また $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ から $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ に下降し、

$x=\frac{15}{16}$ から $x=\frac{31}{32}$ にかけて、また$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ から $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ に上昇し、

$x=\frac{31}{32}$ から $x=\frac{63}{64}$ にかけて、また$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ から $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{13}{16}$に下降する。

以下、この簡単に処理できる法則に従って限りなく進む。すぐわかるようにこの函数は、開区間(0,1)に順番に列をなす最大たちと最小たちの無限の集まりをもち、しかもこれらの最大たちと最小たちはどちらも増加し、値 1 に限りなく近づく。そこで x=1 のとき 函数 W に[函数値] 1 を与えれば、この函数は閉区間[0,1]で連続となり、しかも x=1 で「最大」を（つまりすべての最大の最大を）とるだろう。

§110　　　[§106,107, 108 からの帰結]

[補題]　　「どんなに小さい ω をとっても、開区間(c$-\omega$,c)で単調増加(あるいは単調減少)させることも、開区間(c, c+ω)で単調減少(あるいは単調増加)させることもできない」、そんな函数であっても、それが連続性の法則にすら従わない函数ならもちろんのこと、たとえそれが連続な函数であっても、ある変数値 x=c があって、そこで極値（ein Äußerstes）つまり最大または最小をとることはあり得る。

[至るところで非単調な連続函数]

§111　[どんなに狭い区間をとっても単調にならない連続函数の実例]

[定理]　閉区間 [a,b]において連続性の法則(Gesetz der Stetigkeit)に従う函数を Fx とする。どんなに小さな ω[>0]を選んでも、(a, a+ω)であれ、(b, b $-\omega$)であれ、そして(x, x$\pm\omega$)であれ(ただし a<x<b)、これらの区間で単調増加にも単調減少にもならない、そんな函数 Fx が存在する。

（証明１） 次のような x の函数を考える。x=a に対しては値 A をとり、x=b に対しては A と異なる(たとえば)A より大きい値 B をとり、しかも開区間(a,b)で一様に(gleichförmig)[つまり直線状に]変化するような、すなわち x の一定の増加分に対して y の一定の(正または負の)増加分が対応しつつ変化するような、そんな x の函数 y_1 を考える。[このとき]函数 y_1 についてはつねに $y=A+(x-a)\frac{B-A}{b-a}$ が成り立つ。

（証明２）　y_1 と異なる動きを見せる第二の連続函数 y_2 を考える。y_2 は、単調に増加（あるいは単調に減少）するのではなく、上昇と下降の交代(Abwechslungen)が有限の集まり(Menge)をなすように設定する。たとえば、x の二つの端の[変数]値(die äußersten Werthe)である a および b と、その中央の[変数]値 $\frac{1}{2}$(a+b)において、y_2 は y_1 と同じ値を、すなわち

それぞれ A と B と(A+B)/2 をとるようにし、しかも開区間$(a,\frac{1}{2}(a+b))$であれ、開区間$(\frac{1}{2}(a+b),b)$であれ、y_2は[それぞれ]まず上昇し次に下降するように設定する。具体的には、y_2が開区間$(a,\frac{1}{2}(a+b))$においてとる最大値としては、$x=a+\frac{3}{8}(b-a)$のときの値$A+\frac{5}{8}(B-A)=\frac{3}{8}A+\frac{5}{8}B$がそうなるようにするのである（ちなみにこれは B より大きくない)。さらに話をできるだけ簡単にするため、上昇と下降はともにかならず一様とし、さらにこう置く。

$x=a$ から $x=a+\frac{3}{8}(b-a)$ までのすべての x で、$y_2=A+\frac{5}{8}(x-a)\frac{B-A}{b-a}$、

$x=a+\frac{3}{8}(b-a)$ から $x=\frac{1}{2}(a+b)$ までのすべての x で、$y_2=\frac{1}{2}(A+B)+(\frac{a+b}{2}-x)\frac{B-A}{b-a}$、また

$x=\frac{1}{2}(a+b)$ から $x=a+\frac{7}{8}(b-a)$ にかけて、$y_2=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{5}{3}(x-\frac{a+b}{2})\frac{B-A}{b-a}$ として y_2 を上昇させ、

$x=a+\frac{7}{8}(b-a)$ から b にかけて、$y_2=B+(b-x)\frac{B-A}{b-a}$ として y_2 を下降させる。[つまり a と b の間を 3:1:3:1 に分割する。]

こうして［閉区間[a,b]において]、 y_2は $x=a+\frac{7}{8}(b-a)$ で最大値 $B+\frac{1}{8}(B-A)$ をとる。ちなみに B<A なら、上昇、下降、最大、最小などの言葉を交換すれば、今の議論がすべてそのまま成立する。

（証明３） 函数y_1から函数y_2を導いたのと同様のやり方で、今度はy_2から第三の函数y_3を次のように導き出す。すなわち先に[y_2を導くために]全間隔[$b-a$]にしたのと同じこと[つまり４分割]を、今度は間隔$b-a$の４分割でできた各々[の間隔]に対してするのである。つまりこれらの[四つの]各区間を[函数 y_1 から函数 y_2 を導く時にしたようにそれぞれ 3:1:3:1 に]四分割し、その[新たな]四区間のそれぞれの開区間で(innerhalb dessen)、y_3がまず上昇し次に下降するようにする。[先ほど] y_2 が単調に上昇するだけか、単調に下降するだけか、その二つに一つであったような、そんな変数 x の開区間の最大の間隔は、[分割が 3:1:3:1 である以上] $\frac{3}{8}(b-a)$ を超えなかったが、この函数y_3 の場合、そのような間隔は $(\frac{3}{8})^2(b-a)$ を超えない。

（証明４）そこで[先に]函数 y_2 についてしたのと同じ[一連の]操作を新たに函数 y_3 にも施すと、第四の連続函数 y_4、すなわち上昇するだけの、あるいは降下するだけの最大の間隔が

$(\frac{3}{8})^3(b-a)$であるような、第四の連続函数 y_4 を得る。

[訳者のコメント。函数 y_1 から y_2, y_3..・・・yn を構成する手続きがわかりにくいので説明する。

(a) 座標上に点 A と点 B をとる。この 2 点を通る直線が「函数 y_1」である。ただし B>A とし、便宜上、この右上がりの線分 AB を「大区間」と呼ぶ。
(b) 線分 AB の中点 M をとって、その右と左の二つの線分をそれぞれ「小区間」と呼ぶ。
(c) 小区間 AM を 3:1 に内分する点を K とする。（同様に、小区間 MB を 3:1 に内分する点を L とする。）小区間 AM を底辺とし、また K を通る垂直線上に頂点を持つ三角形 PAM を、線分 AB より上側に作る。なお頂点 P は、線分 PM と線分 AM が M を通る水平線について線対称になるように定める。（全く同様にして三角形 QMB を作図する。）
(d) こうしてできる、２つの山の４つの斜面からなる折れ線 APMQB を函数 y_2 とする。
(e) さらに、2 つの山の 4 つの斜面の各々に、先ほどの操作(a)(b)(c)(d)を施す。そのときできる、8 つの山の 16 の斜面からなる折れ線を函数 y_3 とする。（翻訳者のコメント終わり）。]

（証明５）この議論は際限なく進める(in das Unendliche fortsetzen)ことができるし、数

$(\frac{3}{8})^n(b-a)$ は n の増加とともに限りなく小さくなるから、こう言ってよい。すなわちこの過

程で我々は、その開区間で函数が「単調に増加している」、あるいは「単調に減少している」といえるような、x の値の差[間隔、区間]のうちで最大の差が所与の ω より小さいような($<\omega$)、しかも連続性の法則に従うという性質を失っていない関数 Fx に、やがて行き当たる(auffinden)と言ってよい。

だが証明はまだ終わっていない。別々の函数たちならいざ知らず、どんなに小さい[狭い] ω を持ち出しても、同一の函数において(in einer und eben derselben)、この函数が「つねに上昇だけをする」とか「つねに下降だけをする」と言えるような x と $x\pm\omega$ の間[の間隔]が見つからないほど、それほど頻繁な[上昇と下降の]交代(eine so vielfaltige Abwechslung)があり得るものだろうか。[以下に、そんな ω が見つからないほど頻繁な上昇と下降の交代があり得ること示そう。]

（証明６）このような特性を有する函数は次のようにして得られる、というのが私の主張である。変数 x に依存するに当たって以下のような法則(Gesetz)に従う函数 Fx を考えよう。法則はこうである。「[まず] x を固定する。n が増大するにつれて、x に対する函数[値] y_n が

限りなく近づく(しかし等しくはならない)限界[極限、Grenze]をもって、x に対する Fx の[函数]値と見做せ」という法則がそれである。私はまず、このような函数[Fx]が実際に可能であること(in der Tat möglich)を示さなければならない。そしてそれを示すことさえできれば、この函数が連続性の法則にも従うこと、また定理に謳われた特性[上昇と降下のくだんの頻繁な交代]を有することも容易に示すことができる。

a)　次のこと、すなわち「a と b の外部にない x のどの値(jedem nicht außerhalb a und b gelegten Werthe der x)に対しても、Fx が一定の可測な(eine bestimmte meßbare) 値をとる」ことさえ示せれば、あの函数 Fx の可能性は保証される[筈である]。

[まず変数 x として有理表現を持つ可測数を考える]。 x=a なら Fa=A であるし、x=b なら Fb=B であるし、$x=\frac{1}{2}(a+b)$ なら $F(\frac{a+b}{2})=\frac{1}{2}(A+B)$ である。そのときさらに、Fx のとる函数値たちの無限の集まり(eine unendliche Menge)を考えると、[そのなかからとったある函数値は、ある y_n がある変数 x でとる函数値の筈だから]、それは A と B で合成される有理表現(eine aus A und B zusammengesetzten ratinonalen Ausdruck)で表示可能であるに違いない。なぜなら、[無限個の]函数たち y_1、y_2、y_3・・・のどれか一つがとる特定の値と、A と B から合成される[ある]有理表現が、一致する(zusammenfallen)からである。というのも、これら y_1、y_2、y_3・・・は、人が隔たり b – a の分割の作業(Geschäft der Theilung)を進めるなかで遅かれ早かれたどり着く x の値、に対する Fx[ある y_n]の値だからである。

だがあの二つの限界値[a と b]の間(zwischen)にある有理でない任意の x の値に対しても、Fx の可測値が対応することは、次のことから知られる。まず A<B とすると明らかに、函数 y_2 がとるすべての[函数]値のなかで最小値は =A であり、最大値は $=\frac{1}{8}(9\boldsymbol{B} - A)$である。しかし A>B とすると、今度は A が最大値であり、$\frac{1}{8}(9\boldsymbol{B} - A)$ が最小値である。ゆえにいずれにせよ函数 y_2 の最大値と最小値の差は、$\frac{9}{8}(\boldsymbol{B}-A)$ より大きくならない。さて函数 y_3 の値を求めるために、距離 (b–a) の四つの部分(Stücke)の各々に、先に y_2 のすべての値を導くために全体の距離　(b–a)　に対してしたのと同じ手続きを施すと、次のことがわかる。y_3 の四つの部分のどれか一つに対する y_3 の[函数]値と[函数]値の最大差は、先に$(\boldsymbol{B}-A)$だった距離が今回は$\frac{5}{8}(B–A)$なのだから $\frac{9}{8}\cdot\frac{5}{8}(B–A)$となる。同様にして、函数 y_3 を得るために作られた距離(b–a)　の 16 の部分のどれか一つにおける[函数]値と[函数]値の差の最大は$\frac{9}{8}\cdot(\frac{5}{8})^2(B–A)$ である。ゆえに一般

に、函数 y_n を得るために作られる距離（b–a）の 4^{n-2} 個の各部分のどれか一つにおける[函数]値と[函数]値の差の最大は $\frac{9}{8}\cdot(\frac{5}{8})^{n-2}(B–A)$ である。（ちなみにこの部分に属す x は、互いに、 $(\frac{3}{8})^{n-2}(b–a)$ を超える差を持たない。）そこで n の値をさらに r だけ増やし、函数たち $y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots y_{n+r}$ を作ると、互いに $(\frac{3}{8})^{n-2}(b–a)$ 以上は異ならない[二つの]x に対する y_n と y_{n+r} の[函数]値の差は、決して次の和より大きくはならない。その和とは、そこに登場する個々の差を加算した和、つまり

$$\frac{9}{8}\cdot(\frac{5}{8})^{n-2}(B–A)+\frac{9}{8}\cdot(\frac{5}{8})^{n-1}(B–A)+\frac{9}{8}\cdot(\frac{5}{8})^{n}(B–A)+\cdots+\frac{9}{8}\cdot(\frac{5}{8})^{n+r-2}(B–A)$$ である。

この差は、加算を限りなく続けたときこの列がとる値、すなわち $3(\frac{5}{8})^{n-2}(B–A)$ よりかならず小さい。そこで y_n は函数 y_n の[函数]値ではあるが、それ[y_n]をある x に対する函数 Fx の特定の[函数]値と解釈すると(verstehen)、y_n と Fx の差は、いずれにせよ $3(\frac{5}{8})^{n-2}(B–A)$より小さいので、n を限りなく大きくするとこの差は限りなく小さくなる。ゆえに Fx の値は[たとえ有理表現は持たなくても]、望むだけ正確な(genau)決定ができるような値なのである。

b) ［ところで］この場合、函数 Fx は明らかに連続性の法則に従う。なぜなら、[まず]y_n が連続性の法則に従うゆえに、x に対する y_n の値と、$x+\Delta x$ に対する y_n の値の差は、Δx[の減少]とともに限りなく小さくなる。[ところが]その、x に対する y_n の値と $x+\Delta x$ に対する y_n の値の差は、[x に対する]Fx と[$x+\Delta x$ に対する]$F(x+\Delta x)$の差に近づくのだから、Fx と $F(x+\Delta x)$の差もまた限りなく小さくなるのである。

c) しかしその連続性にもかかわらず、この函数は無限に頻繁に上昇と下降を繰り返し(eine unendliche Menge von Abwechselungen des Steigen und Fallens Statt findet)、それも、a と b の外部にない(nicht außerhalb)すべての x について、どんなに小さな ω を取ろうが、「Fx は x と $\pm\omega$ の間で単調に上昇している」とは言えず、「Fx は開区間$(x, x\pm\omega)$で単調に下降している」とも言えない、まさにそのような仕方で上昇と下降を繰り返すのである。その理由は、[ω を指定されても]さらに小さい ω をとって、十分に大きい n を見つけて、

$(\frac{3}{8})^{n-2}(b–a)<\omega$ とできるからである。この n について y_{n+1} は、$(\frac{3}{8})^{n-1}(b–a)$に等しい

か、それより小さい[原文に不等号＜を＞とする誤記あり]距離の間で［y_nのときに比べて]少なくとも[回数で]二倍上昇し二倍下降する函数を表わしている。ゆえに開区間(x, x+ω)でも、y_{n+1} は[y_n があの距離でするのに比べて、回数で]二倍の上昇と下降を行う

だろう。さて、y_1,y_2,y_3・・・という形式を持つ函数たちが上昇と下降を繰り返すなかでとる最高値たちと最低値たちは、全部、函数 Fx にも姿を現わす。だから、開区間(x,x+ω)にある四つの一続きの x の値に対して、それで決まる[Fx の函数]値、α、β、γ、δで、しかもβ＞αかつγ＜βであるようなα、β、γ、δをとることができる。したがって函数 Fx もまた、開区間(x,x+ω)では、単調に上昇するのではなく、単調に下降するのでもないのである。

§112　　　［「最大と最小」の再吟味]

[補題]　§106[の定理]には「最大と最小が[無限回にわたって]順次交代する(in ihrer Aufeinanderfolge wechseln)」という条件(Bedingung)が書き込まれていた。しかし函数が連続性の法則に従うというだけでは、この[最大と最小が交代するという]条件は自明でないし必然的でもない。なぜなら[先ほどの§111 が示唆するように]、「開区間（x,x±ω）で単調増加または単調減少をする」と言えるほど小さいωが見つからない関数 Fx では、[たとえ] Fx と F(x±ω)が一対の極値になるような二つの[変数]値 x と x+ωがあっても、さらにその間(zwischen)に第三の[変数]値があって、それに対応する値がまた極値になるかもしれないし、その場合、「次という形で並ぶ一対の極値(ein Paar nächst aufeinander folgenden Aeußersten)」は無意味な言葉となるだろうし、それゆえ「[一対のうち]一方が最大で他方が最小でなければならない」という言い方も成り立たないからである。

§113　　　　[112 を受けて][

［定理]　x が正(positiv)の方向に増加したとき函数 Fx がとる極値(ein äußerster Werth)を Fc とし(§98)、x がさらに正(positive)の増加をしたときこの函数 Fx がとる次(nächst)の極値を F(c+γ)とする。併せて、この関数が閉区間[c, c+γ]で連続性の法則に従うことも知られているとする。さてそのとき、二つの極値(Aeußerest) すなわち Fc と F(c+γ)の一方が「最大」で、他方が「最小」であるためには、負の(negativ)片側増加に関する F(c+γ)という極値がなければならない（正と負の両側増加である必要はない)。

（証明）

1. 値 Fc が正の増加についての最大で、F(c+γ)が負の増加についての最小であるケースについて、[Fc と F(c+γ)の一方が「最大」で、他方が「最小」であることを]証明すれば十分である（他の場合の証明は同様に処理できる)。関数 Fx は閉区間［c, c +γ]

で連続性の法則に従うから、§60 によると、函数 Fx が c から c+γにかけて(von x=c bis x=c＋γ)とるすべての値のなかには、最大であるような値が一つ、最小であるような値が一つ存在する。なおこの場合、最大とはそれより大きいものが他にないという意味であり、最小とはそれより小さいものが他にないという意味である。さて[仮に]Fc がこのような最大値でないと仮定すれば、c と c＋γの外側にない[つまり閉区間 [c, c＋γ]の]、しかし c ではないある x の値があって（それを c+$\mu\gamma$と書こう)、それに対応する Fx の値つまり F(c+$\mu\gamma$)が上述の最大値になっている筈である。さて§99 ゆえに、[一つには]この F(c+$\mu\gamma$)が最大[値]であるか、[また一つには] c+$\mu\gamma$を間に含むような一対の数αとβがあって、くだんの函数が開区間(α,β)のすべての値に対して F(c+$\mu\gamma$)という[一定]値をとり続けるか、そのいずれかとなろう。[§98 の「定義」の段落 2,3 を参照]

2. 第一の場合、すなわち F(c+$\mu\gamma$)が最大である場合は、「開区間(c, c+γ)には最大も最小もない」という定理の条件に真っ向から矛盾する。
3. そこで第二の場合を吟味する。この場合、十分に小さい i があって、この i およびそれより小さいすべての i に対して、方程式 F（c+$\mu\gamma$—i）=F（c+$\mu\gamma$）が成り立たなければならない。さてこの式で i は無条件に(unbedingt)小さくできるが、無条件に大きくすることはできない。なぜなら、i=$\mu\gamma$とすると、表現 F (c+$\mu\gamma$—i) は =Fc だが、それは=F（c+$\mu\gamma$）ではないのである。それゆえ、表現 F（c+$\mu\gamma$—i）を ＝F（c+$\mu\gamma$）にするという特性(Beschaffenheit)は、ある値より小さいすべての i の値には帰属するが、押し並べてすべての値に帰属するのではない。それゆえ、[RZ.7.§109 により]j よりも小さいすべての i はいま述べた性質を有する、と言えるような j のなかで最大であるような、そんな可測数 j が存在する。
4. さてこの j について私はこう主張する。「まず j<$\mu\gamma$である。しかし F（c+$\mu\gamma$—i）という値は、F（c+$\mu\gamma$）と等しいうちで最後のそれである。これに対して、j に数 j+ωを代入したとき得られる値 F(c+$\mu\gamma$—(j+ω)）は、ωをいくら小さくとっても、直ちに <F（c+$\mu\gamma$）とならざるを得ない。」私はそう主張する。そこで
   α） j<$\mu\gamma$であることは、すでに見たように Fc< F（c+$\mu\gamma$）から明らかである。
   β） F（c+$\mu\gamma$—i）が F（c+$\mu\gamma$）と等しい値を持つことはくだんの函数の連続性から知られる。なぜなら、i<j であるすべての i について、方程式 F（c+$\mu\gamma$—i）＝F（c+$\mu\gamma$）が成り立つから、i=j の場合も、つまり F（c+$\mu\gamma$—j）＝F（c+$\mu\gamma$）も成り立たなければならないのである。最後に、F(c+$\mu\gamma$—(j+ω))も＜F（c+$\mu\gamma$）でなければならないことは、[第一に] j とは、それより小さいすべての i が関係 F (c+$\mu\gamma$—i)＝F（c+$\mu\gamma$）を満たすと言えるような、そんな数のなかでの最大であるという前提と、[第二に]最大値に等しくないすべての関数値は、この最大値より小さくなければならないと言う事情に、由来している。
5. 以上から、F (c+$\mu\gamma$—j) が最大(少なくとも片側最大)であることが明らかである。

さて

あの関数には開区間(c,c+γ)で極値がないと前提したのだから、この第二の仮説も捨てざるを得ない。そこで残るのは、「Fc は閉区間[c, c+μγ]のすべての[変数]値について最大値を持たない」と認めることである。

6. これらの値のなかには、それより小さい値のない値が一つ存在しなければならない。そこでもし、それが F(c+γ)という値であると認めなければ、それは F(c+μγ)という表現を持つことになるだろう（ただしμγ＜γ)。しかし§99 より函数のこのような最小値は最小(Minimum)であるか、さもなくば、数 c+μγを含む二つの限界α,βがあって、開区間(α,β)でのすべての函数値が一定の値 F(c+μγ)をとるか、そのいずれかである。F(c+μγ)が最小であるという前者の想定を採用すれば、くだんの函数が c と c+μγの w にして、開区間(c, c+γ)に（片側にせよ）一つの最小の存在を認めざるを得なくなる。

しかしそれは受け入れられないので、残る可能性は、F(c+γ)という値そのものを函数の最小値と認定することである。それゆえ、この値がまさに最小である。

7. しかしそれが、（両側ではないとしても、少なくとも）x の負の増加に関してそうでなければならないことは容易にわかる。何故ならそれを否定すると、「F（c+μγ―ω）がそれとそれより小さいすべての値に対して= F（c+γ）である、と主張できるほど小さいωが存在することになろうから。そしてすでに見たように、ここから、「F（c+γ―j）と言う形式を持つ最小が、つまり c と c+γの間に極値が存在することになるからである。

§114

[定理]　　函数 Fx が開区間(a,b)のすべての[変数]値 x において連続性の法則に従い、この開区間に複数の極値を持ち（片側か両側かは問わない)、しかもその極値[である函数値]に対応する変数値が、すべてその「次」を持つように分布しているならば、私はこう主張する。隣同士である二つの極値では、両方とも片側最大である場合をのぞいて、またその間(zwischen)のすべての変数値に対して一定値をとる場合を除いて（後者の場合、二つの極値はともに最大、ないしはともに最小である)、一方がかならず最大であり、他方がかならず最小である。

(証明)

1. 開区間(a,b)から値 c をとる。先の命題[§114]ゆえに、Fc が両側最大(ein beyderseitiges Maximum)なら、Fc の次の(nächst)極値、しかも正および負の両方の増加における次の極値は、最小(Minimum)である（そのような両方の増加における極値があるのなら)。逆に Fc が両側最小なら、正および負の両方の増加における次の極値は、最大(Maximum)である
2. Fc が単に片側最大や片側最小なら、片側極値の概念に照らして、「その i と、それより

小さい i に対して $F(c+i)=Fc$ であり、またそうであり続けるような」、そんな x の増加 i がなければならない。しかし先に§.No.3 で証明したように、方程式 $F(c+i)=Fc$ を満たすような i には最大の i、すなわち j がなければならない。また $F(c+j+\omega)$ は $>Fc$ または $<Fc$ でなければならない。したがって、$F(c+j)$ は極値、しかも片側極値でなければならない。

3. しかしこの極値がどんな極値であるかは決まらない。同じ Fc についても、最大でもありうるし、最小でもありうる。このことは次の実例で納得がいくだろう。Fx が $x=0$ から $x=c$ にわたって ax という値を取り、$x=c$ で ac になるとし、ただ $x=c$ から $x=c+j$ にわたっては、ずっと $=ac$ であり続けるとする。そのとき、a と c が正なら、値 ac が片側最大の例である。

   この場合、$x=c+j$ に対する次に来る片側極値が最大になったり最小になることを妨げるものはない。例えば $c+j$ より大なるすべての値について $Fx=ax=aj$ ならば、前者であり、$Fx=2ac+aj-ax$ ならば後者である。

[飛躍と空白に関する記載(§115 から§118)は省略する]

第二部　導関数（Abgeleitete Functionen）

[導函数の基本事項]

§119　　[商の特異性]

[次の話題へ]　本編の目的はこう設定されていた。変数とそれに依存する数があるとき、変数がさまざまな値をとるのに応じて、変数に依存する側の数が、依存性の法則の個別の特性に即して(nach der besonderen Beschaffenheit des Gesetzes ihrer Abhängigkeit)見せる独特の挙動(Verhalten)を詳らかにすること、それが本編の目的である。さてここまで我々は、変数の差(Unterschied)が限りなく小さくなるとき、[その変数に]依存する数の差も限りなく小さくなるか、それともそうならないのかという考察にのみ専念してきたが、しかしすぐわかるように、二つの差をさらに精密に比較するとき、すなわち一方を他方で割ったうえで(dividieren)、そこから得られる商(Quontien)の特性を注視するとき、我々は数々のさらなる特異な事実(Eigentümlichkeit)を知るに至るのである。それはこういうことである。二つの数が限りなく小さくなるとき、その二つの数の和分(Summe)、差分(Differenz)、積(Prodekt)は限りなく小さな数になるけれども、こうした二つの数の商[だけ]は、極めて多様な値をとるという特異性を示すのである。[つまり]ある状況では、この商は任意の値のうちのある定数を取るだろうし、別の状況では、再び変数となったうえで、それは限りなく増加することもあれば、ある可測数に（望むだけ）近づくこともあり、[さらに別の状況では]そのどちらにもならないこともある。例えば[第一の状況の例として]函数 W=ax を考えると、ΔW=aΔx であり、ゆえに商ΔW/Δx は=a だが、この商は x にも Δx にも依存しない数である。だが[第二の状況の例として] W=ax^2 なら、ΔW＝(2ax+Δx) Δx であり、ゆえに商ΔW/Δx は＝2ax+ Δx である。それは、「2ax には依存するが、Δx には依存せず、しかし x には依存するような」、そんな数に限りなく近づく数である。函数 W=a/x ではΔW＝−aΔx/x(x+Δx)であり、ゆえに商 ΔW/Δx は＝−a/x(x+Δx)であるが、これは x が 0 でない限り−a/x^2 という値に限りなく近づく。ただし x=0 のときは非可測数となる云々[これが第三の状況の例である]。

§120　[「導かれた値(abgeitete Zahl)」と「導かれた函数（abgeleitete Function)」]

[定義]　　Δx が限りなく小さくなるとき、商 ΔFx/Δx がある数(Zahl)に限りなく近づく事

例がとくに注目に値する。このような数を私は「Fx から導かれた数(die abgeleitete Zahl)」と呼ぶが、この場合、「函数 Fx から、[変数]値 x において、正（または負）のΔx について、導かれた数」という言い方は次の内容を指している。ある可測な数 M があって、この M については、「ある変数値 x に対して、そしてΔx の正または負の符号に対して、Δx を十分小さく取りさえすれば、差（ΔFx/ Δx）−M が、その絶対値において、どんな所与の数よりも小さくなり(wird)、しかもΔx をさらに小さくしてもその所与の数より小であり続ける(verbleiben)」と言えるなら、その M が「函数 Fx から、[変数]値 x において、正（または負）のΔx について、導かれた数」なのである。[つまり]x の特定の値に対して、Δx の正または負の値に対して、先ほどの M のような数があるのなら、そのとき私は、「函数 Fx は、x の特定の値に対して、正または負の増加分に対して、つまり正方向または負方向について、導かれた数を持つ」という言い方をする。さらに、ある x の値に対して、Δx の正および(sowohl als)負の値[の両方]に対してこのような数 M が[それぞれ]見つかるなら、「Fx は両側について導かれた値、両方向についての導かれた値、正負の両増加分について導かれた値である」などと言う。[さらに]x の一定の値に対して、両方向で、つまり正と負の両方向で、つまりΔx の正および負の両方の値に対して、同じ(ein und eben dieselbe)数 M が Fx の導かれた値(abgeleitete Werth der Fx)を表すなら、私はこの M を端的に「値 x における Fx の導かれた値」と呼ぶ。さて x の値が変われば数 M も変わる以上、M[それ自体]はおしなべて x に依存しないでいることができるだろう。そこで Fx に対する「導かれた値」を、x のどの値についても[一般的に]表わすような x の函数(Function)を、Fx の「導函数(die abgeleitete Function)」と呼び、Fx をこの導函数に対する元の函数(die ursprüngliche Function)と呼ぶ。たとえば 2ax を ax^2 の導函数と呼ぶ。なぜなら、x のどの値についても、Δx が限りなく小さくなるとき、商 $\Delta(ax^2)/\Delta x=\{a(x+\Delta x)^2-ax^2\}/\Delta x=2ax+a\Delta x$ が限りなく近づくような、しかも x にのみ依存する数は 2ax だからである。特定の変数値 x に対して商Δ Fx/Δx が無限に大きく(unendlich groß)なるという理由で、あるいはΔx が限りなく減少するときこの商が限りなく増加するという理由で、函数 Fx がある変数値に対して導函数を持たない場合、「Fx の導函数値は無限に大きい(unendlich groß）」などと言う。たとえば、商、$\{1/(1-x-\Delta x)-1/1-x\}/\Delta x$ は x=1 に対して無限に大きくなるから、1/1−x は x=1 に対して導函数を持たないが、「函数 1/1−x の導函数は x=1 で無限に大きくなる」などの非本来的な言い回しも行われる。函数 Fx の導[函]数 M が x に依存し、この M がまた導[函]数を持つ場合、それを M の元の函数 Fx から見て第二階の M の導[函]数と呼ぶ。これと区別して先の導[函]数を「第一の」と名付ける。
[訳者。これ以後の多変数函数の微分の説明は省略する]。

§121
[注解]　ラグランジュ、ラクロア、コーシーをはじめ当代の数学者(Mathematiker)の大部分は、本質的にはいま私がしたのと同じ仕方で導函数の概念を定義している。ただ注意すべ

きことがあって、導函数の概念を立てるとき、総じて彼らは、ある特定の変数値 x に対して函数 Fx が、「正の増加分についてだけ導函数[値]を持つ場合」と、「負の増加分についてだけ導函数[値]を持つ場合」と、「正の増加分と負の増加分とで異なる導函数[値]をとる場合」については、黙して語らないのである。しかし先の定義に照らせばわかることだが、函数が導函数を持たない場合があるのであって、私はこの事実に対して何人も眼を閉ざすべきでないと考える。

多くの人々は、函数 $Fx=(x^2-3x+2)^{3/2}+(x^2-1)^{3/2}$ の場合、x=1 についてもその導函数が $(3/2)\cdot(x^2-3x+2)^{1/2}(2x-3)+(3/2)\cdot(x^2-1)^{1/2}2x$ であることを疑わず、x=1 でそれは 0 になると主張する。しかし私は先の定義をきちんと踏まえた上で、「この函数はその値[x=1]に対してまったく導函数[値]を持たない」と主張する。なぜならこの場合、ΔFx は正の増加分についても負の増加分についても虚数(imaginär)になるので、「Δx が限りなく小さくなったとき、商ΔFx/ Δx が限りなく近づく数 M」を云々することができないからである[訳者。Δx>0 なら $x^2-3x+2<0$ となり、Δx<0 なら $x^2-1<0$ となる]。

さらに、[ある変数値に対しては] 正のΔx についてだけ導函数値を持ち、[別の変数値に対しては] 負のΔx についてだけ導函数値を持つような函数や、[どちらの導函数値も持つには持つが] 前者と後者が一致しない函数もある。そこで導函数を表現するに際して、増加分を正でとったのか負でとったのかを（必要なら）書き添えるのが筋だろうが、しかしただでさえ微分計算にすでに多くの記号が導入されている現状では、新しい記号を持ち込んでその数を増やすのは慎むべきだと考える。

§122

[定理]　どの変数値に対しても、正と負の両方の増加分に関してまったく同一の定数の(eine und eben dieselbe bestandige)導函数[値]をもつような函数が存在する。

だがそうではない函数、つまり変数が変わると函数の導函数[値]も変わるような（しかしそれでも x の函数であり続けるような)、そんな函数もある。

後者のような導函数のなかには、ある開区間で(innerhalb gewisser Grenzen)連続性の法則(Gesetz der Stetigkeit)を守って変動し、もしかすると(wohl gar)それ自体もまた導函数をもつようなものがある。しかし他方ではそうではない場合もある。

（証明）x の函数が ax という形を持つとせよ。すると、$\Delta xF/\Delta x=\{a(x+\Delta x)-ax\}/\Delta x=a$ である。ゆえにこの函数[ax]の導函数は、x のすべての変数と、正と負のΔx について、=a [まったく同じく一定]である。

しかし $Fx=ax^2$ とすると、$\Delta Fx/\Delta x=\{a(x+\Delta x)^2-ax^2\}/\Delta x=2ax+a\Delta x$ となり、変数値が変わればそれ[導函数値]も変わる[すなわち一定値でなくなる]。この実例は同時にその導函数も連続であるような函数、具体的には 2a という別の導函数をもつ函数の例になっている。

さらに x<2 であるすべての x については $Fx=x^2$ 、x=2 とそれ以上の x については $Fx=x^3$ とすると、x<2 であるすべての x について Fx は導函数 2x を、x=2 とそれ以上の x につい

て Fx は導函数 $3x^2$ をもつ。ゆえにこの導函数自体、x=2 において負のΔx について連続性の法則に違反する函数になっている。なぜならこの値[=2]においては、$\Delta F'x=F'(x-\Delta x)-F'x=2(2-\Delta x)-3\cdot 4=-8-2\Delta x$. だから云々。

§123

[定理]　特定の(一価の) 変数値 x に対して一価の函数 Fx を考え、しかもその導函数値を変数の増加分の符号を一定にして考えるなら、Fx は一つの(einzig)導函数値しか持たない。

(証明) なぜなら、Fx が一価なのだから、序文の§11 ゆえに、Δx と$\Delta Fx/\Delta x$ も一価である。ゆえに[RZ7.§92]、二つの異なる（つまり不等な）可測数 M と N があって、商$\Delta Fx/\Delta x$ の値が、Δx が限りなく小さくなるとき、望むだけ M と N[の両方]に近づくことはありえない。

§124

[補題]　$\Delta x=0$ のとき、商$\Delta Fx/\Delta x$は、それ自体つねに不定な(unbestimmt)表現、すなわち 0/0 をとらざるを得ない。なぜなら$\Delta x=0$ なら$\Delta Fx=Fx-Fx=0$ だからである。

しかし函数 Fx が、特定の値 x において、また先ほどΔxについて前提した符号について、ある「導[函]数」を持つとしよう。つまりΔxが限りなく減少するとき、差 $\Delta Fx/\Delta x-M$が $<1/N$ となり、またそうであり続けるような、そんなΔxに依存しない可測な数 M があるとしよう。

さて、この商が値 x において連続性の法則に従う数を表していると考えたいなら、$\Delta x=0$ のとき商$\Delta Fx/\Delta x$がとる値として、一つそしてただ一つの値 M を当てざるを得ない。なぜなら、$\Delta x=0$ に対して商$\Delta Fx/\Delta x$がとる値を C とすると、連続性の条件に照らして、Δxが限りなく小さくなるとき$\Delta Fx/\Delta x - C<1/N$ であり、またそうであり続けなければならないが、しかしΔxが限りなく小さくなるとき$\Delta Fx/\Delta x - M<1/N$ となるのだから、C=M でなければならない。

§125

[定理]　1組の函数 fx とϕx が、開区間(a,b)のすべての変数値に対して同じ函数 Fx の導関数だと考えられるなら、開区間(a,b)のすべての変数値に対して $fx=\phi x$ が成り立つ。

(証明)

[題意より] 開区間(a,b)のすべての x の値に対して、方程式 $\{F(x+\Delta x)-Fx\}/\Delta x=fx+\Omega_1$ と $\{F(x+\Delta x)-Fx\}/\Delta x=\phi x+\Omega_2$ が成り立つのだから、同じこの値[x]に対して方程式 $fx+\Omega_1=\phi x+\Omega_2$ も成り立たなければならない。しかし fx とϕx は定数と考えることができるし、Ω_1 とΩ_2 は限りなく小さくなるのだから[RZ7.§92]、上の方程式が成り立つのは、開区間(a,b)のすべての x の値に対して $fx=\phi x$ である場合に限る。

§126

[補題]　　fx と ϕx がどの x についても同じ[値]を持つ函数ではなくても[つまり同一の函数でなくても]、方程式 $\{F(x+\Delta x)-Fx\}/\Delta x=fx+\Omega_1$ と $\{F(x+\Delta x)-Fx\}/\Delta x=\phi x+\Omega_2$ が、ある孤立した x の[変数]値に対して(für gewisse vereinzelt stehende Werthe von x)[だけ]、[共に]成り立つことはある。たとえば $\phi x=fx-(x-1)(x-2)(x-3)\cdots$ in inf・・とすると、fx と ϕx を同じ函数と見做すことはできないが、しかし積 $(x-1)(x-2)(x-3)$in inf はどの[正の整数]値についても 0 になるから、列 1,2,3,・・・に含まれるすべての x については、方程式　$\{F(x+\Delta x)-Fx\}/\Delta x=fx+\Omega_1$ が成り立つなら、方程式 $\{F(x+\Delta x)-Fx\}/\Delta x=\phi x+\Omega_2$ も成り立つのである。

§127

[定理]　　開区間(a,b)のすべての変数値に対して、一組みの函数が互いに等しい値をとる(gleichgelten)なら、その導函数もまさにこの開区間で互いに等しい値をとらなければならない。しかしその逆は成り立たない。

（前半の証明）開区間(a,b)の x のすべての値に対して $Fx=\Phi x$ とすると、この区間に $x+\Delta x$ をとると、$F(x+\Delta x)=\Phi(x+\Delta x)$である。したがって $F(x+\Delta x)-Fx=\Phi(x+\Delta x)-\Phi x$ であり、さらに$\{F(x+\Delta x)-Fx\}/\Delta x=\{\Phi(x+\Delta x)-\Phi x\}/\Delta x$ である。函数 Fx の導函数を F'x, Φx の導函数をΦ'x と置くと、$\{F(x+\Delta x)-Fx\}/\Delta x=F'x+\Omega_1$であり、$\{\Phi(x+\Delta x)-\Phi x\}/\Delta x=\Phi'x+\Omega_2$であり、$F'x+\Omega_1=\Phi'x+\Omega_2$ でなければならない。さて同じ x について、Ω_1とΩ_2は限りなく小さくすることができるから、$F'x=\Phi'x$ でなければならないし、開区間(a,b)の x のすべての値に対してそうでなければならない。

（後半の証明）しかし逆に、開区間(a,b)のすべての x に対して方程式 $F'x=\Phi'x$ が成りたっても、それだけで方程式 $Fx=\Phi x$ が成り立つわけではない。と言うのは、a が x からまったく独立な任意の数だとすると、二つの異なる函数 a+Fx と Fx が同じ導函数を持つからである。なぜならこの前提下では$\Delta(a+Fx)/\Delta x=\Delta Fx/\Delta x$ であり、どちらも同じ導函数を持つからである。

§128

[補題]　　ある方程式が、そこに登場する変数 x のすべての値に対して、あるいは少なくともある開区間の x のすべての値に対して成立するなら、その変数についてその[方程式の]各辺の導函数を［それぞれ]作っても、[これら二つの導関数の]方程式は不成立にはならない。たとえば一般に$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$ であるが、やはり一般に $3(1+x)^2=3+6x+3x^2$ なのである。

　[しかし]ある方程式が x の一つまたは若干の孤立値(vereinzeltstehenden Werthe)についてだけ成立しており、そこでその[両辺の]導函数を[それぞれ]とる場合、その議論は成り立

たない。たとえば $(x-3)(x-5)x^2=(x-3)(x-5)x^4$ は $x=0$, $x=3$, $x=5$ については正しい方程式だが、この方程式の両辺の導函数をとった[方程式] $(x-5)x^2+(x-3)x^2+2(x-3)(x-5)x=(x-5)x^4+(x-3)x^4+4(x-3)(x-5)x^3$ はそうではないからである。実際、この方程式は $x=0$ については成り立つが、$x=3$ あるいは $x=5$ については成り立たない。

§129

[定理]　先ほどまで我々は、数 W と数 x があって、x を変数とみなしていたのだった。[しかし]もし数 W が数 x から[見かけ上はともかく]実質的に(in der Tat)独立だとしたらどうだろうか。それが起こるのは、[たとえば]x が W の表記から姿を消すとか、あるいは x の値が変わっても W の値が変わらないとき、そのいずれかの場合、そういうことが起こる。たとえば $W=(ax-bx)/cx$ のとき、x に対する W の導函数は 0 なのである。

（証明）W=Fx とすると、[題意より] $F(x+\Delta x)=Fx$ であり、ゆえに $\Delta Fx=0$ であり、ゆえに $\Delta Fx/\Delta x=0$ でもある。したがって商 $\Delta Fx/\Delta x$ が限りなく近づく可測数は 0 のみである。

[至るところ微分不可能な連続函数（ボルツァーノ函数）]

[この§130 から§135 までは難読のため、適宜、単一の段落を複数の段落に分割したことをお断りしておく。]

§130　[函数は、微分可能なら連続だが、連続だからといって微分可能とは限らない]
[定理]　ある値 x において、函数 Fx が正または負の増加分について導函数を持つなら、その x においてこの函数は同じ増加分について連続(stetig)でなければならない。しかし逆に、ある変数値 x において函数がある符号[の増加分]について連続だからと言って、この函数が同じ条件下で導関数を持つとは限らない。
(証明 1)　[前半を証明する]。函数 Fx が値 x において微分可能であり[訳者。ボルツァーノは「二階の連続(stetig seyn vom zweiten Grade)」と表現している]、しかも**Δx** について前提した符号に関してそうだとする。そのとき商 **ΔFx/Δx** ＝ {F(x+**Δx**)－Fx}/ **Δx** は、**Δx**が限りなく減少するにつれて、その x で決まる可測の定数 M に限りなく近づく筈である。だがこのことは、商の分子すなわち差分 F(x+**Δx**)－Fx　もまた、**Δx**とともに限りなく減少する可測数を表わすことを意味する。なぜなら、もしそうでないなら、あの分子が[そもそも] 可測数 でないか、[あの分子は可測数ではあるが、**Δx**が限りなく減少しても]継続して＞1/N であり続けるか、あるいは[あの分子は]**Δx**が限りなく減少するにつれて>1/N になったりならなかったりするか、そういうことになるだろうが、その場合、商 **ΔFx/Δx** は可測数にならないか、無限に増加するかのいずれかである。[ゆえに商の分子すなわち差分 F(x+**Δx**)－Fx　は、**Δx**とともに限りなく減少する可測数でなければならない]。しかし**Δx** が限りなく減少するとき、差 F(x+**Δx**)－Fx も限りなく減少するということは、Fx が値 x において、[二階でなく]一階で(in ersten Grade)、そして**ΔFx/Δx**に認めた符号について、連続(stetig)であることを意味する。
(証明 2) しかし逆に函数の連続性から導関数の存在は結論できない。言い換えると、**Δx**とともに F(x＋**Δx**)－Fx が限りなく減少することから、[**Δx**とともに] 商 {F(x+**Δx**)－Fx}/ **Δx** が一定の可測数に限りなく近づくことは、結論できない。その証拠は、§120 で考察した、x=1 における函数 1/(1－x)である。
[訳者。この最後の実例は明らかに不適切である。GA 版の編者はすぐ後の§132 に登場する函数: x<1 において fx=(1-x)sinIn(1-x)、及び f(1)=0 をもって適切な例とする。]

§131　[ある変数値で連続なのに、その変数値で微分不可能な函数(第一の実例)]
[定理]　ある値 x において、函数 Fx は正または負の増加分について導函数を持たないのに、同じ条件で連続(stetig)であるとしよう。そういうことが起こり得るのは、次の二つ場合のどちらかに限られる。
　その一。**Δx** が限りなく減少するとき、商 **ΔFx/Δx** が限りなく増加する場合。

その二。[Δx が限りなく減少するとき]、差 [ΔFx/Δx− M]が望むだけ[0 に]近づくようなある可測数 M がたしかに存在するけれども、ただ、この[Δx の減少に伴う差の 0 への]接近は維持されず(bleibt nicht bey dieser Annäherung)、どんなに[小さい]Δx をとっても、それよりもっと小さいΔx が見つかって、差ΔFx/Δx− M が >1/N となってしまう場合。

（証明１）[題意より Fx は連続だから]、Δx とΔFxは継続して(fortwährend)可測であり続ける(verbleiben)。だがそのとき[つまり導関数がない以上]、その一とその二に代わる第三の可能性がない[ことをまず証明する]。

[そもそも]Δx とΔFxは継続して可測なのだから、商ΔFx/Δx も継続して可測である。したがって[どんなΔx をとっても]この商よりも（絶対値において）継続して大きくあり続ける一つの可測数があるか[いわゆる上界]、それともこの商が限りなく増加してしまうのか、二つに一つである。[後者の場合、導関数がないことは明らかである（「その一」の可能性）]。.

そこで[前者を仮に採用すると、つまり]ΔFx/Δx よりも継続して大きくあり続ける一つの可測数があると仮定すれば、そのとき[RZ7.§109 より]「『継続してΔFx/Δx より大きくあり続ける』という性質がそれより大きい[すべての]数に帰属する」と言えるなかで最小であるような数 M が存在する[いわゆるボルツァーノ＝ワイアシュトラスの定理による]。すると、Δx のある値に対して、この数 M は商ΔFx/Δx に完全に一致するか、それともΔx のある値に対して、Mが、差 M− ΔFx/Δx がどんな所与の商 1/N よりも小さくなるほどに、ΔFx/Δx に近づくか、そのどちらかでなければならない。なぜなら、仮にこの差が[どんなΔx に対しても]継続して＞1/N であり続けるなら、M 自体について言われたのと同様に、「それより大きい数はつねに >ΔFx/Δx であり続ける」と言えるような、M より小さい数が[別に]存在することになってしまうからである。[だから、Δx のある値に対して、この数 M が商ΔFx/Δx に完全に一致するか、それとも MとΔFx/Δx が、その差 M− ΔFx/Δx がどんな所与の商 1/N よりも小さくなり得るほど近づくか、そのいずれかである、そしてこの場合、関数は導関数を持つ]。

しかし[題意より、ある変数値 x において、函数 Fx は正または負の増加分に対して導函数を持たないというのだから]、ある[小さな]Δx に対して、差 M− ΔFx/Δx がどんなに小さかろうと、あるいは同じことだが、差ΔFx/Δx− Mが（絶対値において）どんなに小さかろうと、もっと小さなΔx があって、ΔFx/Δx− M＞1/N となるほかない[第二の可能性]。なぜなら、さもなくば、§120 の定義に照らして、Fx は[題意に反して]導函数をもち、M がまさにそれになると認めざるを得なくなるからである。[これで第一と第二以外の可能性がないことが示された。]

（証明２）

定理が述べる第一と第二の場合が条件次第で実際に起こることを、次の一対の実例で確認することにしよう。

[第一の場合の実例はこうである]。「y>0 であり、しかも方程式 $y^2=1-x^2$ がつねに成り立つ」という法則のもとで、数 y が変数 x に依存するとせよ。この前提のもとで、その絶対値が >1 ではないすべての x ≦[つまり－1 ≦x≦＋1]に対しては、y が可測値を、しかもただ一つの可測値をとることは容易にわかる。なぜなら、まず記号(Zeichen) a,b,c,d,・・・を 1 より大きい任意の自然数とし、次のような法則に従って、分母 a,ab,abc,abcd,・・・に対して分母 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$,・・・を選ぶとせよ。すなわち

$$(\frac{\alpha}{a})^2 \lesssim 1-x^2 \quad (\frac{\alpha+1}{a})^2>1-x^2$$

$$(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{ab})^2 \lesssim 1-x^2 \quad (\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta+1}{ab})^2>1-x^2$$

$$(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{ab}+\frac{\gamma}{abc})^2 \lesssim 1-x^2 \quad (\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{ab}+\frac{\gamma+1}{abc})^2>1-x^2$$

一般に $$(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{ab}+\cdots+\frac{\mu}{ab\cdots m})^2 \lesssim 1-x^2 \quad (\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{ab}+\cdots+\frac{\mu+1}{ab\cdots m})^2>1-x^2$$

すると[RZ7.§48]、記号 α,β,γ,・・・μ はすべて整数か一部 0 を意味するが、いずれもただ一つの値をとる。さらに[RZ7. § 104, § 105]、無限の数表現(der unendliche Zahlenausdruck)

$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{ab}+\frac{\gamma}{abc}+\cdots+\frac{\mu}{abc\cdots m}+\cdots$ in inf. はただ一つの可測数を表わし、しかもそれは方程式 $y^2=1-x^2$ の y に代入しても成立する値である。そこで私はこう主張する。このように定められた数 y は、閉区間[-1,+1]のすべての値について連続で、しかも開区間(–1,+1)のすべての値について導函数まで持つ x の函数である、と。

[なぜなら]方程式 $y^2=1-x^2$ は x の[上の区間の]すべての値に対して成り立つから、x の代わりに $x+\Delta x$ を、y の代わりに $y+\Delta y$ を入れても、式は成り立つ。すなわち $(y+\Delta y)^2=1-(x+\Delta x)^2$ 、したがって $y^2+2y\Delta+(\Delta y)^2=1-x^2-2x\Delta x-(\Delta x)^2$ だが、[$x^2+y^2=1$ なので]引き算すると、

$y\Delta$ $(2y+y\Delta)=-\Delta x(2x+\Delta x)$、つまりこうである。

$$\Delta y=-\frac{(2x+\Delta x)\Delta x}{2y+\Delta y}$$

まず第一に、この方程式は、函数 y が閉区間[–1,+1]のすべての値について連続であることを示している(ただし $x=-1$ の近くでは Δxを正に、 $x=+1$ の近くでは Δxを負にとるものとする)。なぜなら $x=-1$ のとき $y=0$ であり、$\Delta y=(2-\Delta x)\Delta x/\Delta y$ つまり $(\Delta y)^2=(2-\Delta x)\Delta x$ だが、それは、Δxが正のままで限りなく小さくなるとき、やはり限りなく減少するつねに可測な数が Δy に対応すること[すなわち関数が $x=-1$ で連続であること]を物語っているからである。

この方程式$(\Delta y)^2=(2-\Delta x)\Delta x$は、x=+1 とし$\Delta x$を負にとっても登場する。ゆえに x=+1 でも x=-1 でも、函数は連続である。

しかし[さらに] +1 と−1 の間のどの x の値に対しても、函数は連続である。なぜならどの x においても、y は 0 でない可測な値をもち、$\Delta y=-\ \{(2x+\Delta x)\Delta x\}/(2y+\Delta y)$ の値は、明らかにΔxとともに限りなく減少するからである。

さて+1 と− 1 の間の x のどの値に対しても、y は[連続性のみならず]導函数まで持つ。なぜなら、$\Delta y/\Delta x=-(2x+\Delta x)/(2y+\Delta y)$は明らかに、$\Delta x$とまったく独立な値 $-x/y$ に限りなく近づくからである。

[だが]二つの値 +1 と− 1 に対して y は導函数を持たない。なぜなら、x がこの値[±1]のとき y=0 だから、$\Delta y/\Delta x=(2-\Delta x)/\Delta y$となるが、$\Delta x$[の絶対値]が限りなく減少するとき$\Delta y$も限りなく減少する以上、この式[の右辺]は限りなく増加するからである。[したがって二つの値 +1 と− 1 に対して y は導函数を持たない]。

これが、Δx[の減少]とともに商$\Delta Fx/\Delta x$が限りなく増加する函数の実例である。

第二の場合の実例はこうである。x の値に依存する函数 y が、次に掲げるような仕方で、一連の x の値に対してそれに対応する y の値をとるものとする。

x	y	x	y
0 から $\frac{1}{2}$ まで	x	$\frac{15}{16}$ から $\frac{31}{32}$ まで	$x-\frac{5}{8}$
$\frac{1}{2}$ から $\frac{3}{4}$ まで	$1-x$	$\frac{31}{32}$ から $\frac{63}{64}$ まで	$\frac{21}{16}-x$
$\frac{3}{4}$ から $\frac{7}{8}$ まで	$x-\frac{1}{2}$	$\frac{63}{64}$ から $\frac{127}{128}$ まで	$x-\frac{21}{32}$
$\frac{7}{8}$ から $\frac{15}{16}$ まで	$\frac{5}{4}-x$		

すなわち一般に、

$(2^{2n}-1)/2^{2n}$ から $(2^{2n+1}-1)/2^{2n+1}$ までは、 $y=x-\{(2^{2n}-1)/3\cdot 2^{2n-1}\}$ そして

$(2^{2n+1}-1)/2^{2n+1}$ から $(2^{2n+2}-1)/2^{2n+2}$ までは、 $y=\{(2^{2n+2}-1)/3\cdot 2^{2n}\}-x$

この前提のもとで、y が閉区間[0,1]で連続であることは明らかである。しかしこの最後の値[x=1]に対して y は 1/3 をとる[§106]。なぜなら、x=1 としたとき、n を限りなく増加させるとき、表現 $x-\{(2^{2n}-1)/3\cdot 2^{2n-1}\}$ と $\{(2^{2n+2}-1)/3\cdot 2^{2n}\}-x$ が限りなく近づく限界[極限、Grenzen]は 1/3 だからである。

しかしこの函数は x=1 に対して導函数を持たない。なぜなら、$(2^{2n}-1)/2^{2n}$ から

$(2^{2n+1}-1)/2^{2n+1}$ までの x のすべての値に対して、Δy/Δx=＋1 であり、$(2^{2n+1}-1)/2^{2n+1}$ から $(2^{2n+2}-1)/2^{2n+2}$ までの x のすべての値に対して、Δy/Δx=－1 である。だがすぐわかるように、x=1 のとき、十分小さい負のΔxを見つけて、商Δy/Δx が +1 か－1 のどちらかの値をとるようにしても、さらに小さい負のΔx を見つけて、商Δy/Δx がそれと異なる値をとるようにすることが可能だからである。

§132　［ある変数値で連続なのに、その変数値で微分不可能な函数(第二の実例)］

[注解]　前節で扱った第二のケースは、函数がある変数値においてまさに以下の理由で導函数を持たない事例であった。すなわち、［たしかにΔxが限りなく減少するとき］商 {F(x+Δx) –Fx}/Δx は、継続して可測なままで或る可測な定数 M に近づくけれども、ただ、差 ΔF/Δx－M が ［一旦 <1/N となりさえすれば]、さらに小さいΔx で二度と >1/N にならない、とは言えないというのがその理由である。こうした事態は、[序文で触れた]変数のすべての値に対して同じ内容を語るただ一つの法則（die einem einzigen für alle Werthe ihrer Veranderlichen gleichlautenden Gesetze）に従う函数でも起こり得る。すでに何度か取り上げた関数（c－x)sin log(c－x）を、その証明のためにここで再び取り上げよう。

この函数はもちろん、x=c と x の負の増加分[ω]について§38 で説明した連続性を有している。なぜなら、差 F(x+Δx)－Fx は x=0 において ＝ωsinlogω であり、当然、ωとともに限りなく減少するからである。しかしそれでもこのとき導関数は存在しない。なぜなら商 {F(x+Δx)ーFx}/Δx=sinlogω は両端の値 +1 と－1 の間で無限回にわたって振動する(hin und herschwanken)からである。したがって Cauchy 氏の Cours d'Algèbre [Cours d'Analyse の誤記]に登場する若干の命題、たとえばその第二章§3 の命題、「分数の分母と分子が、ともに、変数 x の値と同時に限りなく減少する無限に小さい量であるなら、x=0 におけるこの函数の値は有限(endlich)か、0(Null)か、無限(unendlich)か、そのいずれかである」という命題は、若干の修正を必要とする。なぜなら、この書き方は、商の値が二つの限界の間をずっと振動するゆえにこの値が不定(unbestimmt)であるケースを考慮していないからである。Cauchy 氏はこの命題に証明を与えたが、そのとき次のことを、すなわち「ある変量(veränderliche Größe)が別の変量と同時に消失(verschwinden)するなら、それは *kx*(1±ε)[正確には $K\cdot x^n(1\pm\varepsilon)$]という形式で表示されなければならない（ただし *k* は 0 でない定数か、x とともに消失する変数を表す)」を前提していた。しかしこの前提が厳密(strenge)に説明されてないこと、いやそもそも普遍的に正しいとさえ言えないことは、この明敏な学者なら自ら悟るに違いない。

§133　[一変数に限って微分可能で、その一変数に限って連続な函数]

[定理]　孤立した一変数値に限って連続である若干の函数についてはすでに見たが(§46)、孤立した一変数値に限って導函数[値]を持つような函数もある。またある一変数値において連続で、しかもちょうど(eben)その変数値で導函数も持つような函数もある。

（証明）
$(2m+1)/2^n$ という形式をもつ値 x において[函数]値（$1+1/2^n$）をとり、それ以外の値においては[函数]値 Fx=x をとる函数 Fx を考える。この場合、§46 より $F(x+\Delta x)-Fx$ は次の四つの値しかとることができない。

$$x+\Delta x \;;\; +x/2^n+(1+1/2^n)\Delta x \;;\; -x/2^n+\Delta x \;;\; (1+1/2^n)\Delta x$$

（ただし x にせよ、$x+\Delta x$にせよ、$(2m+1)/2^n$ という形式ではないとする。あるいは、第一番目ないしは第二番目ないしは両方がこの形だとする。）さて§46 から明らかなように、この函数は x=0 においてのみ連続である。しかしまさにこの値において函数は導関数も持つ。なぜなら[x=0 のとき、上記の四つの値は、Δx ; $+(1+1/2^n)\Delta x$; $+\Delta x$; $(1+1/2^n)\Delta x$ となるから]、$\{F(x+\Delta x)-Fx\}/\Delta x$ は＝1 か、$=1+1/2^n$ かのいずれかであるが、後者は、Δx を限りなく減少させつつ、n を限りなく増加させると、値 1 に限りなく近づくからである。ゆえにまさに 1 を、Δx が限りなく減少するにつれて商$\{F(x+\Delta x)-Fx\}/\Delta x$が限りなく近づく限界(Grenze)と考えることができる。

§134　　　　[変数と微分不可能性の関連]
[定理]　函数は[すでに見たように]、孤立した変数値において導函数を持つこともあれば、変数値の総体(Inbegriff)[区間]において導関数を持つこともあり、開区間(a,b)で導函数を持つこともあれば、押し並べて(durchgängig)すべての[変数]値において導関数を持つこともある。それと同様に、函数は[逆に]、孤立した変数値において導関数を欠く(ermangeln)こともあれば、変数値の総体において導函数を欠くこともあり、開区間(a,b)で導函数を欠くこともあれば、押し並べてすべての[変数]値において導函数を欠くこともある
（証明）　10 より小さいすべての x において Fx=x とし、x=10 なら Fx=20 とし、10 より大きいすべての x において Fx=1+x とする。そのとき、10 より小さい x のすべての値で、商 $\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1$ であり、ゆえに 1 が導関数であり、同様に 10 より大きい x のすべての値において、$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}=\frac{(1+x+\Delta x)-(1+x)}{\Delta x}=1$ である。すなわちこれらのすべての値において 1 が導関数である。

しかし x=10 の場合、Δxが正なら、差 $F(x+\Delta x)-Fx$ は$=1+10+\Delta x-20=-9+\Delta x$ であり、Δxが負なら、差 $F(x+\Delta x)-Fx$ は $=(10-\Delta x)-20=-10-\Delta x$ である。ゆえにこの函数は x=10 では連続でさえなく、まして導関数は持たない(§130)。

さらにある開区間のすべての値で導函数を欠く函数もあれば、すべての値において押し並べて導函数を欠く函数もあることは、[そこにおいて]連続ですらない函数があることから直ちに明らかである。

§135　[至るところ微分不可能で、至るところ連続な函数]

【補題】　我々は§111 で次のような函数 Fx を、すなわち上昇と下降を繰り返す函数であって、ただ、x の値に対してωをどんなに小さくとっても、開区間（x,x+ω）で単調増加または単調減少にできないほど、それほど頻繁に(so vielmal) 上昇と下降を繰り返す函数を考察したのだった。さてこの函数[の存在]は次の事実を、すなわち「非常に多くの変数値で連続でありながら[それと同じ]非常に多くの変数値で導函数を持たない函数がありうる」という事実を証拠立てている。ただその趣旨は、どんな二つの変数値をとっても、その間に(zwischen)、この函数が導函数を持たないような第三の変数値を見つけることができるほど、それほど多くの変数値においてこの関数は導函数を持たない、という意味である。

その理由はこうである。Fx の値は、x において函数たち y_1, y_2, y_3・・・がとる値たちのうちから一つを選び、それを Fx にきちんと当てることによって決まる[§111]。そこですぐわかるようにΔx が限りなく減少することによって、商ΔFx/Δx が限りなく近づく一定の(beständig)可測数など存在せず、それどころかこの商は限りなく増加するのである。このことは、導函数 F'x が無限に大きいこと(unendlich groß)、すなわち導函数が存在しないこと(nicht vorhanden)を意味する(§120)。すなわち、もっと小さいΔxをとっても、十分大きい n が見つかって $(\frac{3}{8})^{n-2}(b-a) < \Delta x$ になってしまうのである。この $(\frac{3}{8})^{n-2}(b-a)$ を簡単のためにαと表記し、また x に対する函数値 Fx と、 x+αに対する（より大きい）函数値 y_n との差をβと表記すると、x+ $(\frac{3}{8})\alpha$ には y_{n+1} の増加分＝$(\frac{5}{8})\beta$ が対応し、x+ $(\frac{3}{8})^2\alpha$ には y_{n+2} の増加分＝$(\frac{5}{8})^2\beta$ が対応し、一般に、x+ $(\frac{3}{8})^r\alpha$ には y_{n+r} の増加分＝$(\frac{5}{8})^r\beta$ が対応する。さて、いま挙げた変数値にそれぞれ対応する値が Fx の値であり、函数の増加分 y_{n+r} が Fx の増加分なのだから、すぐわかるように、比 ΔFx/Δx は、x が徐々に小さくなるにつれて、次の一連の値、すなわち $\frac{5}{3}\frac{\beta}{\alpha}$, $(\frac{5}{3})^2\frac{\beta}{\alpha}$, $(\frac{5}{3})^3\frac{\beta}{\alpha}$、・・・・$(\frac{5}{3})^r(\frac{\beta}{\alpha})$ ・・・ をすべてとるだろう。ところが $(\frac{5}{3})^r$ は限りなく増加するから、当然、比ΔFx/Δxも限りなく増加するのである。

[訳者。全訳にはほど遠いが、これで、ボルツァーノによる「いたるところ微分不可能な連続関数」の存在証明は終わったものと理解する。15th.August.2020.　Kaneda.]