[翻訳]　記念講演　エルンスト・エドゥアルト・クンマーのために

クルト・ヘンゼル

（訳者）ベルリン数学協会主催の E・E・クンマー生誕 100 年記念祭(1910 年 1 月 8 日、ベルリン大学)における数学者クルト・ヘンゼル(K・Hensel)の基調講演から、理論的な論評を含む後半、特に der ideale Primfactor を説明する部分を日本語に翻訳する。具体的に言えば、クンマーの論文集（Ernst Eduard Kummer; Collected Papers I ,1975,Springer）に収録された講演の記事から、17 ページ下から 32 ページ下までを翻訳する。この箇所を選んだ理由は、クンマーが多用した ideal と wirklich という一対の言葉がそこに頻出するからである。前半の伝記的な叙述は省略した。また講演の最後に軽く触れられる「相互法則」のくだりと、単に儀礼的な結びの言葉の翻訳も省略した。
日本語に( )で原語を書き添えることがある。原文が説明不足と判断した場合、[ ]で言葉を補うことを躊躇しない。また異様に見えることは承知のうえだが、「観念的(ideal)」と「現実的(wirklich)」という言葉については「観念的」と「現実的」のように着色を施した。ヘンゼルの叙述には、クンマー理論の「哲学的」構造を浮き彫りにする趣があり、着色という仕方でこの構造を直観化することは無益ではないと考えたからである。ちなみに全体は 45 の段落からなるが、通し番号を打ってそれぞれをたとえば[H-34]などと表示する。

「訳文」

[H-1]
ここまで私は、クンマーが彼の研究活動を通じて学問の発展に及ぼしてきた影響について語ってまいりました。しかし皆さま既にお気づきのように、もしこの講演が彼の[個別の]業績に立ち入らないとしたら、そして彼を同時代における斯学の指導者たらしめ、また後世にとって先駆者たらしめた[個別の]業績に立ち入らないとしたら、彼の生涯と彼が成し遂げた事どもの解説は画竜点睛を欠くものとなりましょう。しかし惜しむらくは、私に与えられた時間は彼のすべての仕事に立ち入るにはあまりにも短いのです。彼がもっとも力強く学問に働きかけた分野に考察を絞ることが必要です。それさえ見れば彼の創造的ファンタジーのあり方がわかる、そんな分野に考察を絞ることが必要です。高等数論における数々の発見と観念的な数(ideale Zahlen)の創出(Schöpfung)がまさにそれです。

[H-2]
既に触れましたように、数論の領域における 20 年にわたる発見の功績によって、クンマーはドイツのみならず、最終的には同時代のすべての算術研究者の頂点に立つこととなりました。しかしこの一連の発見はまさにブレスラウ大学への招聘(1842 年)とともに口火を切ったのでした。クロネッカーとの書簡の交換が始まったのもこの時期であり、これらの書簡からクンマーの[数学]思想の生成と発展が明瞭に読み取れることも既に触れたところです。

[H-3]
さて後年、クンマーはその分野[数論]で極めて偉大な学問的成果を挙げることにはなるのですが、当初、彼にとってこの分野に分け入っていくことが必ずしも容易でなかったことは、いささか興味深い点です。

[H-4]
ここから先の話をわかりやすくするために、私は初等数論の或る重要な問題に、しかもクンマーがやがてそこから研究に着手することになる或る問題に、焦点を絞ろうと思います。ご承知のように、数論(Zahlentheorie)あるいは算術(Arithmetik)は通常の整数 1,2,3…を扱いますが、それは[あくまでも]整数が体系的に基礎付けられている(begründet)限りにおいて、しかも整数の<u>積分解</u>(multiplikative Zerlegung)に関連する限りにおいて整数の性質を解明しようとするものです。残念ながら、足し算による分解で見えてくるような数の性質は、ここでは完全に排除せざるを得ません。現状、こうした性質の直接的な学問的処理には、克服しがたい障壁が立ちはだかっているからです。そこで[整数の積分解に話を戻すと]、積算的な数論全体のよって立つ基盤(Grundlage)は、次の命題に集約されます。すべての[整]数は、同じかまたは異なる素因数たち (Primfaktor) の積(Produkt)にかならず(stets)分解でき、しかも《ただ一つの仕方で(nur auf eine Weise)》分解することができる。言い換えると、すべての[整]数は素数(Primzahl)たち 2,3,5,7,11…の積の形で、しかもただ一通りの仕方で(auf eine einzige Art)合成できる、と。

[H-5]
数論において長きにわたって解けなかった重要問題のほとんどは数の<u>加算的</u>(additive)性質に基礎を置く問題であり、それが解けるのはおおむね、その問いを積算の問題に置き換えることに成功したときに限られていたのでした。このことは、私が思うところあって今からお示しする次の課題において顕著です。すなわち、整数の長さを有するすべての直角三角形、あるいは同じことですが、もっとも単純なフェルマーの方程式($x^2=y^2+z^2$)のすべての整数解を発見せよという課題において、このこと[すなわち積算の問題への置き換えが成功したときに限って加算の問題が解けること]は顕著です。ちなみに、クンマーの創造的な仕事はすべてこのフェルマーの方程式に結びついており、この問題が一連の創造的な仕事を生み

出したと言っても過言ではありません。そこで方程式を次のように書き換えてみましょう。

$$z^2=x^2-y^2=(x+y)(x-y)=b_0b_1$$

これで加算の問題が積算の問題に置き換わりました。つまり元々の[加算の]問題が、積 b_0b_1 が平方数[z^2]になるようなすべての x,y を見つけよ、という[積算の]問題に置き変わったのです。この形なら課題を完全に解くのは容易です。すでにピタゴラスはこの方程式の無限に多くの整数解を知っており、インドの数学者はそのすべての整数解を知っていました。解はたとえばこうです。

$$5^2=3^2+4^2,\quad 13^2=5^2+12^2,\quad 25^2=7^2+24^2,\quad \cdots$$

[H-6]

ここで次のことを押さえておきましょう。フランスの偉大な数学者にしてトゥルーズ議会議員 Pierre Fermat は、アレクサンドリアの数学者ディオファントスの算術書の六の欄外注に、「方程式 $z^\lambda=x^\lambda+y^\lambda$, $\lambda=2,3,4,\cdots$ については、そのもっとも簡単な場合[$\lambda=2$]が整数解を持つ唯一の例であり、したがってたとえば整数の立法数の和である立法数はなく、４乗数の和である４乗数はない、云々」と主張したのでした。この予想外の事実の驚くべき証明を書くのにこの欄外は狭すぎる、と彼は書き添えております。

[H-7]

証明を書き込むのに十分な白紙がフェルマーの手元になかったのは、とりあえず不運なことです。しかしよくよく考えれば、このことは学問の発展にむしろ幸いしたと言えるかもしれません。なぜならこの状況がなくても、我々はおそらく、それ自体さほど重要でもないフェルマーの命題の完全な証明を[やがては]手にしたでしょうが、この状況なしでは、クンマーのイデアル論（Idealtheorie）を手にすることはなかった筈だからです。実際、まさに上の命題を証明する一連の努力のなかでこそ、クンマーのイデアル論は誕生したのです。

[H-8]

すぐわかるように、いわゆるフェルマーの方程式　$x^\lambda=y^\lambda+z^\lambda$.　が整数の範囲で解けないことの証明は、冪数 λ が 4 か奇素数 3,5,7,11…である場合について証明すれば十分です。フェルマーの問題が我々の数論の試金石となるのはこの姿においてであり、まさにこの姿において、この問題は数論の発展に極めて大きな影響を及ぼし続けてきたのです。

[H-9]

[そこで]まず $\lambda=4$ のとき、加算の問題を積算の問題に置き換えてみましょう。先の方程式を(2)として、それを　(3) $z^4=x^4-y^4$　と書き換えると、右辺は四つの因数(Faktoren)に分解され、$i=\sqrt{-1}$ とするとこんな形になります。

$$\text{(3a)}\quad z^4=(x-y)(x+y)(x-iy)(x+iy)=b_0b_1b_2b_3$$

これで積算の形で問題を処理する準備が整いましたが、この場合、右辺の因数が、全部が全部、実の(reelle)整数になっているのでないことに注意が必要です。そうではなく、最後の二つの因数が整の複素整数だと言うことが少なくとも言えます。つまりそれらは a と b を実の整数として、a＋bi という形を持つ数なのです。[さて]このような数にも我々の算術の成果が適用できるというのなら、これらの複素数も±１、±２、±３…と同様に扱うことができなければなりません。ガウスの前述の書物[Disquisitiones Arithmeticae] がそれに向かって偉大な一歩を踏み出したのでした。[すなわち]彼は、a＋bi という拡大された(größeren)すべての数領域においても、拡大以前の実整数たちのなす狭い領域とそっくり同じ諸法則が成り立つことを示したのでした。とくに次の証明は重要です。すなわち、この領域におけるすべての実の数および複素数は、それ以上分解不可能な素数たちの積として、しかもただ一通りの仕方で表示可能であると。つまり[まず実の素数に目を向けると]この数領域では、4n－1 という形を持つ実素数 3,7,11,19,23,31,…は［そもそも］すべて分解不可能なのですが、4n＋1 という形を持つ実素数 5,13,17,29,37…はかならず二つの異なる分解不可能な複素数の積になります。たとえば.

$$5=(2+i)(2-i),\quad 13=(3+2i)(3-2i),\quad 17=(4+i)(4-i),\cdots$$

のように。あと 2 の場合は、1 を別にすれば、1－i の二次形式(Quadrat)に一致します。[ところで実の素数だけでなく]、複素数領域の素数についても同じことが言えるのであって、実数の理論の場合同様、ここでも次の基本法則が成り立ちます。すなわち、「すべての複素数は、かならずそしてただ一つの仕方で、複素素数たちの積に分解される」と。つまり、たとえば次のようなただ一通りの(eindeutig)分解が成り立つのです。

$$24-3i=3(2+i)(3-2i)$$

[H-10]

この拡大された(erweiterten)領域でも通常の数論の命題がすべて妥当しますが、それはこの基本法則があればこそです。また変形された方程式(3a)を使って、$\lambda=4$ のときに限っての話ですが、フェルマーの方程式の不成立は特段の困難なく証明されるのであって、それもまさにこの基本法則があればこそです。

[H-11]

そこで［次に］ λ が任意の奇の素数(たとえば $\lambda=5$)の場合について、方程式 $x^{\lambda}=y^{\lambda}+z^{\lambda}$ をめぐって、上と同じ仕方で加算から積算への転換を探る流れとなります。この方程式を

$$z^{\lambda}=x^{\lambda}-y^{\lambda}$$

と書き換えるまでは同じですが、先ほどは有理数に $i=\sqrt{-1}$ という数を付け加えた(hinzunehmen)のに対して、今度は有理数に（先ほどと違って）いわゆる代数的数(algebraische Zahl)を付け加えることにより、右辺をここでも λ 個の因数の積に分解することができます。具体的には、α を方程式

$$\alpha^{\lambda}=1$$

のいわゆる原始根(primitive Wurzel)とすると、先の右辺［$x^{\lambda}-y^{\lambda}$］が次のようなλ個の因数の積として表示されるのです。すなわち

$$z^{\lambda}=(x-y)(x-\alpha y)(x-\alpha^{2}y)\cdot\cdot\cdot\cdot(x-\alpha^{\lambda-1}y)\ =b_0b_1\cdot\cdot\cdot b_{\lambda-1}$$

さてここで先ほどλ＝4 の場合に使ったのと同じ方法を使いたくなりますが、次の点には注意が必要です。つまりこの因数 b_k たちについては、通常の整数ではなく、「αと整数たちから有理的に(rational)に合成された数」を試みる必要があるということです。[つまり]先ほどは［b_kを］a_0+a_1i という数で表記しましたが、これに類推を働かせながら(analog)、[しかし] b をもっと一般的に整数の係数たちを持つ

$$b=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^{2}+\cdot\cdot\cdot+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$$

という形で考えようというわけです。

[H-12]

さてフェルマーの問題をこういう仕方で一般化した上で、数論のさまざまな方法と成果をそれに適用しようとすると、まずクリアーしなければならない問題は、これらの数たち[b_k] ―― 《αにおける数たち(Zahlen in α)》と呼ぶことにしましょう ―― についても、算術の基本諸定理(die Grundsätze der Arithmetik)は妥当するのだろうかという問題です。すなわち、[この基本諸定理との関連で]まず(zunächst) クリアーしなければならない問題は、これらの数たち[b_k]は、かならず(stets)「αにおける」それ以上分解されない数たちの積として表現できるのだろうか、という問題です。

[訳者注。これから先、「αにおける a」などの表現が多出するが、(老眼の身には) αと a が実に紛らわしいので、グロテスクを承知で「α(アルファ)における a」などと記す。]

[H-13]

天性の算術家クンマーはあらん限りの集中力を傾けてこの問題に取り組みました。しかし当初、彼はこの領域でこれといった知見を得ることができませんでした。そうこうするうちに、「実際にやってみた範囲では(in der Tat)、α（アルファ）における整数はいつでも(stet)分解不可能な因数たちに分解できた」という貴重な結果を手にした彼は、この事実(Tatsache)に基づいて、かねて議論の的になってきたフェルマー問題を一挙にそして一般的に解決する日は近いと信じたのでした。[実際]、この問題のそれまでの解決は、ごく僅かな冪数(4,3,5とその他少々)に限って、多大の困難を乗り越えて、各冪数に特化した方法でなされたに過ぎなかったのです。

[H-14]

さていまから述べることはあまり知られてはいませんが、数学者の Grassmann から聴かされた Grundelfinger 氏も含めて、出どころのしっかりしたいくつかの証言によってちゃん

と裏の取れた内容です。クンマーはこの研究を進めるなかで、偉大なフェルマーの命題の完全な証明を本当に発見したと信じたのです。クンマーは、フェルマーの命題をλ＝5 の場合について極めて鮮やかに証明したディリクレ(Dirichlet)宛に、だからこの問題の最良の批評者に違いないと彼が見込んだディリクレ宛に[彼から預かった]原稿を返送するに当たって、彼自身の証明を添付して返送したのでした。数日後、ディリクレはこう返信しました。「証明は極めて優れたものです。そして、α（アルファ）における数たちはかならず分解不可能な因数たちに分解されるというだけでなく（貴兄はこのことは証明されました）、もし、この分解が≪ただ一つの仕方で≫可能であることまで確認できていたなら、文句なしにそれは正しい証明になっていたことでしょう。しかしもし後半の仮定が正しくないのなら、算術の大部分の命題はα（アルファ）における数については証明されず、貴兄の証明はすべて危うい(hinfällig)ものとなりましょう。遺憾ながら小生には、α（アルファ）における数たちが実際に上記の基本性質を普遍的に持っているようには思えないのです」と。

[H-15]
無慈悲な、しかしその正しさを直ちに受け入れざるを得ない反対意見をどう受け止めるか、それが真に偉大な学者の精神(Geist)と熱量(Energie)の証左です。彼は何よりも次のことを悟り、それをケーニヒスベルク大学への[創立]祝賀文書にも書き記しております。すなわち、「我々の学問的算術のあの基本的要求に答えないからといって、α（アルファ）における数についての算術的研究を放棄するのは適切でない。なぜなら、α（アルファ）における数は自然(Natur)の与えたもうたものであって、それについての認識は、円周等分方程式(Kreistheilunggleichungen)の本性(Natur)を解き明かすうえで不可欠であり、また大きく見れば、代数全体とりわけフェルマーの命題と高次元の相互法則(Reziprozitätsgesetze)にとって不可欠だからである」。(当時クンマーが、既にこの相互法則を最高の学問的テーマと見定めていたことがここからわかります)。彼ほどの深みを持たない思想家なら、この課題は自分に不向きと見限ったでしょうが、彼はそうしませんでした。他の学者ならこの問題を別の角度から攻略しようと試みたでしょうが、彼はそれもしませんでした。[そうではなく］クンマーはα（アルファ）における数の領域に改造を施す（den Bereich dieser Zahlen in α modifizieren）ことを選んだのです。学問的数論の基本法則が維持されるように、すなわち数の素因数たちへのただ一通りの分解可能性が維持されるように、α（アルファ）における数の領域の方を改造する道を彼は選んだのです。

[H-16]
クンマーは[ディリクレが指摘した]α（アルファ）における数のあの不可解な性質について、すなわち「α（アルファ）における数は[たしかに素数たちに分解はされはするが]、複数の仕方で(auf verschiedenen Arten)素数たちに分解されてしまう」という不可解な性質について、長きにわたって思索を重ねたのでした。その結果、彼のなかには徐々にこういう確信

(Überzeugung)が芽生えてきたのです。すなわち、α（アルファ）における数たち(Zahlen)の領域は、その個々の数が、目に見えている[wirklich（現実的な）]数を素因数として内蔵するような数であるためには＜狭すぎる(zu klein)＞、[つまり] その個々の数が、もっとも単純な要素たちを内蔵するような数であるためには＜狭すぎる(zu klein)＞のであって、端的に言ってまさにこの狭さこそが件の不可解な性質のよってきたる所以だと、彼は確信したのです(die Überzeugung, der Grund liegt einfach darin, daß der Bereich der Zahlen in α zu klein , um ihre wirklichen Primzahlen zu enthalten、ihre einfachsten Elemente zu enthalten）。さてクンマー[という巨人]の肩に載った私たちにすれば、α（アルファ）における数の領域同様にあの特徴的な性質を有する「狭い領域」を作り上げることは、造作もないことです。実際、通常の整数 1,2,3・・・の領域から或る数たちを除去する(Weglassung)ことによって、この「狭い領域」を作り上げることができるからです。このような[狭い]領域を見ておくことは、件の数たちについてクンマーが[やがて]申し立てる一連の命題の正しさを理解するための一助となるでしょう。皆様にお示しする[狭い]領域とはこうです。

（訳者注）文中の「もっとも単純な要素たちをうちに含んだ」のくだりはいわゆる「素因数分解の一意性」を意味し、したがってそれは、前出の、「それ以上分解されない数たちの積として表現できる」(H-12) や、「素数の積として、しかもただ一つの仕方で合成される」(H-4)という言葉と破綻なく繋がるので問題ない。しかしその直前の箇所が難しい。

《die Überzeugung, der Grund liegt einfach darin, daß der Bereich der Zahlen in α zu klein , um ihre wirklichen Primzahlen zu enthalten、ihre einfachsten Elemente zu enthalten.》そのなかの下線を付した、zu klein , um ihre wirklichen Primzahlen zu enthalten が難しい。まずこの文章は機械的にこう訳しても意味はわからない。「すなわち、「α（アルファ）における数たち(Zahlen)の領域は、その現実的な素因数を内蔵するためには＜狭すぎる(zu klein)＞、[つまり] そのもっとも単純な要素たちを内蔵するためには、＜狭すぎる(zu klein)＞のであって、端的に言って、この狭さこそが件の不可解な性質の理由なのだと[彼はそう確信したのです]」。しかしいきなり数が「現実的」と言われても？　難所は複数ある。

1.　ヘンゼルはこの後の(H-17)で初めて、wirklich という言葉の意味が「見えている=betrachten」であることを説明する。ところが勇み足というかフライングというか、彼がこの言葉をここで無説明で先行使用したために、読者（そしておそらく 1910 年の聴衆）は困惑せざるを得ない。

2.　前項の結果として、読者は苦し紛れにその直後の句をこのドイツ語の言い換えと錯覚し、「wirklich」=「もっとも単純な(einfachsten)」と受け取る可能性が高いが、これは(H-20)での wirklich の定義＝「現実的」と微妙に辻褄が合わない。

3.　さらに軽い？代名詞 ihre は見落とされやすいが、実は重要な意味を帯びている。それは Bereich を指すと受け取られやすいが文法的にはあり得ず、この代名詞は複数形の女性名詞 Zahlen を受ける。そしてこの Zahlen が最後に出てくる動詞 enthalten の「意味上の主語」なのである。

4.しかも動詞 enthalten は、「領域 Bereich が数たちを含む」などの意味ではなく、「或る一つの数（Zahl）が複数の素因数たちを含む」の意味である。（たとえば 15 が 3 と 5 を含むように）。

5.以上から上記のような訳文となる。言われてみれば、なーんだみたいな話だが、見つけるのはなかなか。

（なお筋の通った訳文にするため、私もヘンゼルに共犯して、上記の訳において「見えている」という訳語の先行使用に手を染めている。）

[H-17]
数 1,2,3,・・・のそれぞれを、同じまたは相異なる素因数に分解したとお考えください。そのとき、これらの数を[次のようにして]二つのクラス K_0 と K_1 に分けることができます。偶数個の（同じまたは異なる）素因数を持つ数をまとめたのが K_0 であり、同じく奇数個の素因数を持つ数をまとめたのが K_1 です。したがって K_0 と K_1 は以下の数を含みます。

K_0=(1,	4,	6,	9,	10,	14,	15,	16,	21,	22,	24,・・・)	
	2・2	2・3	3・3	2・5	2・7.	3・5.	2・2・2・2	3・7	2・11.	2・2・2・3	

K_1=(2,	3,	5,	7,	8,	11,	12,	13,	17,	18,	19,	20,・・・)	
				2・2・2		2・2・3			2・3・3		2・2・5	

[もちろん]クラス K_1 には、通常の意味での素数［素因数を 1 個だけを持つ数]もすべて含まれます。さてここで、我々には第一のクラス K_0 に含まれた数だけが見えている(betrachten)としましょう。また、我々[の視線]は K_1 の数には届かないが(nicht zugänglich)、しかし[視線は届かなくても］その[K_1 の］数を話題にはする(manchmal von ihnen sprechen)と仮定しましょう。すると、[我々から 2,3,5,7,8・・・は見えないわけだから］ただ二つの（同じか異なる）素因数からなるすべての数つまり 4,6,9,10,14,15,21,・・・[を考えると、それ]は、そしてそれだけが、K_0 の内部で分解不可能な数となります。なぜなら、もしこれらの数が K_0 の二つの因数に分解されるなら、それらの因数のいずれも[K_0 の要素である以上]少なくとも二つの素の約数(Primteiler)を含むはずであり、[だから]当初の数は少なくとも四つの素数を含むことになる筈ですが]、K_0 の数はただ二つの素因数でできていると[最初に]決めたのですから、[それは背理なのです]。ところが他方ではこういうことが成り立ちます。16,24,36,40・・・のような、[K_0 には含まれるが、さっきは触れなかった］4 つ、6 つあるいはそれ以上の素因数を含む数を考えると、それはすべて（そして[実は]それだけが)、K_0 において分解可能な数となりますが、ところがこのような数は、[たしかに]合成数なのでかならず分解されはするものの、しかし K_0 の分解不可能な因数たちへと、一般的にではありますが(im allgemeinen)、複数の仕方で(auf mehrere Arten)分解されてしまうのです。たとえば K_0 の数 210=2・3・5・7 をとりあげると、[K_0 で]分解不可能な因数への分解が存在することは存在するのですが、それは三つも存在するのです。すなわち、

210=(2・3)・(5・7)=(2・5)・(3・7)=(2・7)・(3・5)=6・35＝10・21=14・15

ここには[ディリクレが指摘した] α（アルファ）における数の領域での不都合とそっくり同じ不具合が起きています。α（アルファ）における数の領域同様、領域 K_0 で算術の一連の法則が妥当しないのはそのためです。

[H-18]

そこでクンマーは次のような問題を設定します。α（アルファ）における数の領域をどのように拡大すれば(erweitern)、拡大された領域において数の素因数への分解が一通りに(eindeutig)になるのだろうか、という問題がそれです。[先の実例に戻れば]、K_1の数を[K_0に]追加する(hinzunähmen)ことによって、領域K_0をめぐるこの問題が完全に解決されることはお分かりでしょう？　実際、それの追加によって、たとえば 210 の上記の三つの分解は、いずれも 210=2・3・5・7 に落ち着くという意味合いで、一つ(identisch)になるのです。

[H-19]

この平易な実例からクンマーの[あの］問題のための解法が導かれます。それはこうです。《領域K_0の数 1,4,6,9,10,・・・に、領域K_1の数 2,3,5,7,8,・・・のすべて、そしてそれだけを追加せよ。そうすれば、拡大された数領域では、初等算術のすべての法則、とりわけ <数は素因数にただ一通りの仕方で分解可能である>という定理が妥当する》、と。

[H-20]

クンマーはα（アルファ）における数領域について、これと同じ問題を完全に解決しました。K_1の数に対応すべく導入された新しい除数たち(Divisoren)を、彼は「観念的な除数たち(ideale Divisoren)」と名付けました。[我々に見えている(H-17)]、α（アルファ）における数領域に、実在しない(existieren)ということが、この[観念的(ideal)という]命名の理由(weil)です。とくに、[除数の中でも素因数であるそれについては]、先ほどのK_1に含まれている素数 2,3,5,・・に対応する素数の除数を、クンマーは「観念的な素因数(ideale Primfaktoren)」と呼び、[我々に見えている(H-17)]、α（アルファ）における数たちや除数たちを、「現実的な数(wirkliche Zahlen)」と呼んだのでした。ちなみに［これから先］上の実例に言及する機会もありましょうが、その場合も[実例自体は私の作った実例ではありますが、クンマーの用語法に倣って]、K_0の数を「現実的な数」、またK_1の数を「観念的な数」と呼び、またとくにK_1に含まれる通常の素数 2,3,5, 7 ,11,・・を「観念的な素因数(ideale Primfaktoren)」、「観念的な素除数(ideale Primdivisoren)」などと呼ぶことに致します。

[訳者注]。これがヘンゼルによる、クンマーの「現実的」と「観念的」という概念の定義である。ここで整理しておく。wirklich（現実的）とは「見えていること(betrachten)（H-17)」を意味し、ideal（観念的）とはその否定的内容、つまり「見えている(betrachten)数領域には実在しない(existieren)こと」を意味する。これが「観念的(ideal)」という命名の理由である。このことから「wirklich:ideal」という対立が、（見る）意識主体を予想すること、そしてこの境界線（：）が随時（主観的に）移動することも知られる。

[H-21]

要するにクンマーは以下の事柄を示したと言えるでしょう。[第一に］α（アルファ）における現実的な数たちの領域、あるいはα（アルファ）における現実的な除数たちの領域が、

観念的な除数の追加によって拡大(erweitern)されること、その結果[第二に]、すべての現実的な数と(und)すべての観念的な数からなるこの拡大された領域では、すべての数とすべての除数が、一通りの、まさにただ一通りの仕方で、(同じまたは異なる)素因数たちの積の形に表示できること、それゆえ最終的に[第三に]、この拡大された領域では、初等算術の ≪あらゆる(all)≫ 積算法則の本質部分(im wesentlichen)が妥当すること。

[H-22]

そこでようやく(dann)、α(アルファ)における数の[さらなる]研究によって、先ほどの K_0 の数の場合にそうであったように、α(アルファ)における数でも次のことが起こった理由が明らかになります。すなわち[観念的な数を導入する前の]α(アルファ)という当初の(ursprünglich)領域では、すべての数が一般に分解不可能な因数たちに分解されるけれども、しかしそれが複数の仕方で分解される他なかったことについて、[単にその事実ではなく]その理由(Grund)までが具体的に(wirklich)明らかになるのです。

[H-23]

観念的な素数を普通の有理素数のように扱いたい(rechnen)のなら、何はともあれ、現実的な数を示された場合、それがその観念的な素因数によって割り切れる(teilbar)かどうかを決める手立て(Mittel)が示されていなければならず、また割り切れるなら割り切れるで、どんなときにそれが割り切れるのかを決める手立て(Mittel)も示されていなければならない筈です。さてクンマーはこの根本問題をα(アルファ)における数の領域で解決し、それを踏まえて観念的な数の存在(Existenz)を立証したのですが、例のあの[私が提示した]わかり易い実例を使って彼の天才的な手さばき(die genial Art)を具体的にイメージ化すること(anschaulich machen)が可能です。まずこんな問いを立ててみましょう。或る a が[K_1 に含まれる]観念的な素因数たとえば 2 を含むか否かを、≪「現実的(wirklich)」な数の領域 K_0 から一歩も出ずに(allein)≫決定せよ、という課題を立てるのです。言い換えれば、商 a/2 は整数なのか分数なのかを、[まさに上に述べた仕方で]決定せよという課題を立てるのです。ところで a/2 が整数になるのは、[たとえば]

$$5a/2 = (5\cdot 3)\cdot a/(2\cdot 3)$$

もまた[同時に] 整数のときであり、そのときに限ります 。また、右辺の商には、分子であれ分母であれ、K_0 の「現実的な」数しか含まれていませんから[なぜなら 2,3,5 は K_1 に属すが、(5・3)と(2・3)は K_0 に属すので]、この設問の決定は飽くまでもこの[現実的な数の]領域[K_0]内での検算(Probieren)に委ねられたことになるのです。当然、結果はこうなります。「a を観念的な整数 2 で割る代わりに、分数 2/5=(2・3)/(5・3) で割ってみよ。この分数は、右辺からわかるように現実的な分数として表現されていて、約分されたときに限って[K_1 の]観念的な素の約数 2 を分子に持つ。」すると数 a は、現実的な商 2/5=2・3/5・3 で割り切れるとき、かならず 2 で割り切れ、また a が 2 で割り切れるのはそのときに限る

ことになります。これを一般化すると[つまりこの論法を反復すると]、数 a はたとえば商 $(2/5)^7=(2\cdot 3/5\cdot 3)^7$ で割り切れるとき、またそのときに限って、つまり $(5\cdot 3)^7\cdot a/(2\cdot 3)^7$ が K_0 の整数であるとき、またそのときに限って、2^7 で割り切れることでしょう。

[H-24]

まったく同じ思考法を、α（アルファ）における現実的な数たちの領域(Bereich)に[拡張して]使うとどうなるでしょうか。α（アルファ）の一つの現実的な数 a を一つの観念的な素数 𝔭で割るというのではなく、約数（Teiler）として、分子は 𝔭 だが、分母に 𝔭 だけは含まないような分数の除数 (Divisor) 𝔭 / 𝔯を選ぶことだってできる理屈です。いやさらに、適当な除数 𝔰 を選んで拡張してやることによって、分数 𝔭 / 𝔯 が α における一つの現実的な 分数 p/r に移行するように、つまり

$$\mathfrak{p}/\mathfrak{r}=\mathfrak{p}\mathfrak{s}/\mathfrak{r}\mathfrak{s}=p/r$$

となるように分母を選ぶこともできるでしょう。すると先般の実例に倣って、次のような命題を述べることができます。

「α（アルファ）における一つの現実的な数 a が観念的な素除数(der ideale Primdivisor) 𝔭 で割り切れるのは、a が現実的な分数の除数　p / r を含むときでありそのときに限る。あるいは同じことだが、ra が p で割り切れるときであり、そのときに限る。また一般的に言えば、a が $\mathfrak{p}^\rho$ で割り切れるのは、$r^\rho a$ が現実的な数 p^ρ を含むときである」。

[訳者注] ρ はギリシア文字ローである。

[H-25]

しかしこの場合、「観念的な除数たちを、α（アルファ）における現実的な数たちだけで表現する」ことができないとしたら、得られた成果はさして大きいとは言えません。しかしクンマーはこのことも驚くべき簡単なやり方でやって退けたのです。これについてもクンマーのやったことを、我々の実例に即してわかりやすい形でお示しすることが可能です。

[H-26]

先般の実例では、すべての現実的な数の領域 K_0 は、偶数個の素因数を含む数、すなわち

1,　2・2，　2・3,　3・3,　・・・　　　から成っており、

すべての観念的な数の領域 K_1 は、奇数個の素因数を含む数、すなわち

2,　3,　5,　7,　8,　11,　・・・　　　から成っていたのでした。

さてそこで、<領域 K_1 のすべての数を、領域 K_0 の数で表現する>という課題ですが、答えは明快であってこうです。たとえば、K_1 の観念的な数 $30=2\cdot 3\cdot 5$ を選ぶと、その平方すなわち $30^2=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5$ は K_0 の数つまり現実的な数となります。なぜならそれは偶数個の素因数を含むからです。つまり[こういうことが言えます]。

[K_1の]観念的な数の平方 a^2 はかならず[K_0の]現実的な数 A である。また[K_1の]観念的な数は何らかの(einer)[K_0の]現実的な数の平方根(Quadratwurzel)に等しい。
[訳者注] 原文では 30 が 35 になっているがミスプリントか。

[H-27]
そもそも a が[K_0の]現実的な数なら、当然、a の平方 a^2=A も[K_0の]現実的な数です。ということは、観念的な数であれ現実的な数であれ、平方は必ず[K_0の]現実的な数になるということです。したがって、すべての観念的な数と現実的な数とを得るためには、[K_0の]現実的な数たちに、そこから選んだ或る数たちの平方根を付け加えれば十分です。そこで少し考えればわかるように、問題はこうです。K_1のすべての観念的な数を得るために、いったいK_0のなかからどの数の平方根をとればよいのか、と。

[H-28]
さてこの新しいアプローチによって(damit)、「K_0の或る現実的な数 b が、観念的であれ現実的であれ或る数 a によって割り切れるか否か」という問題が、先ほどとは別の仕方で、完全に解決されるのです。たとえば a も[b 同様、K_0で]現実的なら、この問題は単純な検算(Probieren)によって決定できます。では a が[K_0で]現実的でない場合はどうでしょうか。[以前と同じ理屈で] b/a が整数なのは $(b/a)^2=b^2/a^2$ が整数のときに限られますが、[先ほど見たように] a^2 は[K_0で]現実的なのですから、この場合も、件の問題は単純な検算で解ける理屈です。

[H-29]
この成果は次のようにまとめることができます。「我々は、まずすべての現実的な数と観念的な数を、二つのクラス K_0 と K_1 に分割した。つまり前者いわゆる主クラス(Hauptklasse)がすべての現実的な数を含み、後者がすべての観念的な数を含むようにした。さて、K_0の任意の数にK_1の任意の数を掛けると、これらの積のすべては、ただ一つのクラスつまりクラスK_1に属すだろう。なぜならいずれの掛け算においても、第一の因子(Faktor)[上の掛け算で掛けられた側]は偶数個の素因数を含み、第二の因子[上の掛け算で掛けた側]は奇数個の素因数を含むから[結果的に、その積も奇数個の素因数を含むので]。同様にして、K_1の二つの因子の積もK_0に属すだろう。したがって、上記のクラス分けは次のような性質を持つと言える。或るクラスのすべての要素(Elemente)にそのクラスのすべての要素をかけても、あるいはそれに別のクラスのすべての要素をかけても、そのとき得られるすべての積は、かならず[K_0にせよK_1にせよ]一定のクラスに(in einer und derselben Klasse)帰する、と」。ここまでの成果はそうまとめることができるのです。

[H-30]
さてここからクンマーは[一般に]、「α（アルファ）における現実的な数と観念的な数の領域でも、[いま実例で見たのと]文字通り同じ連関(Beziehung)が成り立つ」ことを示したのでした。ただα（アルファ）における数の場合、関係は格段に複雑になります。「我々の実例で見たのと同じ簡明なクラス分け法則が、これらの数においても働いていること」の証明は、あらゆる時代を通じて最高水準の数学的達成と呼んでも過言ではありません。

[H-31]
先の実例では、除数たちの領域に対してクラス分けを施す（in Klassen einteilen）ことができたのでした。さてα（アルファ）における数たちの領域つまり現実的な除数たちに、すべての観念的な除数たちの総体を付け加えると、著しく拡大された除数領域(eine sehr viel größeren Divisorenbereich)が得られますが、この拡大された除数領域についても、先の実例の場合同様のクラス分けが可能なのです。ただしこのクラス分けは実例と違って二つのクラスへの分割ではなく、一般により多数のクラスたちへの分割になりますが、ただ、それがかならず有限個の(eine endliche Zakl)クラスたちへの分割になることが重要です。クンマーがしたように、このクラスたちの数を H とし、クラスたちそのものを

$$K_0,\quad K_1,\quad K_2,\quad \cdots K_{H-1}$$

と表記することにしましょう。クラス K_0 いわゆる主クラスがすべての現実的な除数を、つまりα（アルファ）における数そのものに対応する除数を含むことは、先の実例と同じです。そして残りの除数たちが他の H-1 個のクラスたちに分けられるという話の流れです。

[H-32]
ここでも以下のことが成り立ちます。主クラス K_0 の二つの数の積 $\beta\gamma$ はまたもや K_0 の数となります。なぜならこの積はまたもやα（アルファ）における数になるからです。しかし一般に任意の二つの除数クラス H_g と H_k を選び、それの除数をそれぞれ$\mathfrak{D}_g$と$\mathfrak{D}_k$とすると、次のようなクラス分けが可能です。すなわち、すべての積 $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_g\mathfrak{D}_k$がまたもや、クラス H_g と H_k で決まる或る特定の(einer und derselben)クラスに帰属するという仕方で、クラス分けが成立するのです。先の実例とそっくり同じことが起こるのです。

[訳者注。$\mathfrak{D}_1$の添字は l(エル)である。]

[H-33]
実例においては、K_0 の数であれ K_1 の数であれ、すべての数の平方は主クラス K_0 に帰属しました。同様に、いま述べたクラス分けの基本性質だけを拠り所として、次のことを導くことができます。すなわち、観念的な除数 $\mathfrak{D}$ は、冪数を H まで上げてやれば (zur H^{ten} Potenz erhoben)、かならず主クラス K_0 の除数 D を、したがってα（アルファ）における現実的な数を与えるということ。またそれゆえ、観念的な除数$\mathfrak{D}$それ自体はすべて $\sqrt[H]{D}$ に等しい、

つまり或る現実的な数の H 乗根に等しいということ。したがって、α（アルファ）における数たちに或る数の H 乗根を付け加えることで、α（アルファ）における観念的な数と現実的な数のすべてが手に入るということ、こうした一連の事柄が導かれるわけです。
[訳者注。K_1の添字は 1（イチ）である。]

[H-34]
この成果は、任意の数βが除数 $\mathfrak{D}$で割り切れるか否かを見極めるための新たな手段を提供します。なぜなら、商 $\beta/\mathfrak{D}$が整数になるのは、同じこと[整数になるということ]がその H 乗 $\beta^H/\mathfrak{D}^H=\beta^H/D$ に言えるときであり、そのときに限るからです。そしてこの問いには簡単な割り算で決定を下すことが可能なのです。

[H-35]
既に見たように、すべての観念的な数の H 乗は現実的な数になるはずです。しかしそれは最小乗でなければならないという意味ではありません。たとえば$\mathfrak{D}$それ自体が現実的なら、1 乗がそれに当たります。また $\mathfrak{D}^h$ が$\mathfrak{D}$の現実的な最小冪なら、h が H の約数の一つでなければならないことはすぐわかります。同様に、$\mathfrak{D}^r$ が現実的で、r と H に共通の約数がないなら、$\mathfrak{D}$それ自体が現実的でなければならないこともすぐわかります。そうすると先の実例に話を戻すと、こう言えるはずです。通常の有理数 $\mathfrak{D}$をとった場合、もし$\mathfrak{D}^r$ が主クラス K_0 に帰属し、したがって$\mathfrak{D}^r$ が偶数個の素因数を所有し、しかも r が奇数であるなら、$\mathfrak{D}$それ自体が主クラスに帰属していなければならない。なぜなら、仮に$\mathfrak{D}$が奇数個の素因数を持つなら、奇数個の冪を持つすべての$\mathfrak{D}^r$ についても、同じこと[奇数個の素因数を持つということ]が言えるからです。おそらくフェルマーの定理を証明する可能性は、一にかかってこの重要な事実に支えられているのです。

[H-36]
α（アルファ）における除数たちのクラス分けにおける、そのクラスたちの個数(Klassenanzahl) H は、理論の要となる数です。それが 1 ならまさにいかなる観念的な数も存在せず、現実的な数のクラス K_0 があるだけです。このクラスはすべての素因数を含むことにもなります。そしてこの場合に限って、αにおけるすべての数は、現実的な素因数たちに、ただ一通りの仕方で分解可能なのです。[しかし] 初等算術のすべての法則が自動的に(schon) α（アルファ）における現実的な数に妥当するのはこのケースだけであり、観念的な数の理論が不必要なのもこのケースに限ります。

[H-37]
或る方程式$\alpha^{\lambda}=1$をめぐって、クラスたちの数を実際に(wirklich)算出するのは、整数論全体で最も難しい課題です。先に述べたようにクンマーは、彼の偉大な師であるディリクレの

一連の方法を駆使してその解決に成功したのでした。ここでは、解析という強力な助っ人を使って数論に新しい道を開いた、ディリクレの驚くべき精緻な方法に立ち入ることは断念せざるを得ません。あまりにも早く逝った Hermann Minkowski は『数の幾何学』(Geometrie der Zahlen)のなかで、まさにこの[ディリクレの]方法を高度の明快さと完璧な美に向けて錬成した人でありました。

[H-38]
ここでは次の注意にとどめます。クンマーの指摘によれば、クラスたちの個数 H は二つの成分からなるのであって、第二の成分が第一のそれに比べて極度に難解であるのに対して、第一の成分は第二に比べて著しく容易なのです。大抵の応用の現場で、クラスたちの数の第一の要素を弁えておればとくに支障がない、というのはとても大切なことです。

[H-39]
すべてが秩序に背を向けようとする没規則の領域において、そこに封印された極めて単純な法則への希求を諦めないでいられるのは、偉大な精神と豊穣なファンタジーの持ち主に限られたのです。この苦難の道を倦むことなく歩み続けるには不屈のエネルギーが求められたはずです。自らの数学上の一連の業績のために、クンマーは人生におけるもっとも貴重な 20 年の歳月を捧げました。しかしその結果は高い賭金に見合ったものです。クンマーが示した一連の原理は、それ以後、一貫して算術と代数全体を支配しているからです。つまり彼は次のことを、すなわちこれらの原理は直接の話題である≪ α における数≫の領域だけでなく、代数にかかわる全領域に妥当するということ、このことを彼は示したのです。たしかに彼自身は、自らが扱う問題に必要な範囲でしか自分の理論を展開しませんでしたが、それでもその理論が普遍妥当であることを彼はちゃんと自覚していました。しかし彼はよく言ったものです。あれこれの美しきもの(Schönheiten in einzelnen)を眼に収めたこと、そしてそれを完全に認識したこと、自分はそれだけで十分なのだと。

[H-40]
算術に捧げた 20 年を貫いて、彼の眼は一貫して二つの問題の完全解決をその最終目標と見定めていました。彼の研究体制はまさにこの二つの問題に向けて照準されていたのであって、それについて彼は自らこう語っています。もし自分がフェルマーの定理と一般相互律の[ideal な数によらぬ] 別の証明方法を知っていたなら、たとえそこでいくら成果が上がろうと、自分は観念的な数の理論を放棄していたことだろうと。[ところが] 我々はクンマーの[ideal な数の]理論を[むしろ]算術のもっとも堅固な基盤と見做すので、クンマーの上記の意見には賛同しかねます。むしろ、Ideal 理論をもたらす結果になるまでクンマーの精神を強く鼓舞したことについて、我々はフェルマー問題への感謝の念を抑え切れないのです。

[H-41]

ここで、クンマーがイデアル理論（Idealtheorie）を駆使してフェルマーの定理の[或るタイプに限ってとはいえ] 一般的証明に到達した経緯を一瞥しましょう。[実は] クンマーは方程式　$x^{\lambda}=y^{\lambda}+z^{\lambda}$　が、全整数の領域において解けないことだけではなく、より一般的に、それが＜α における数＞という拡張された領域においても解けないことを証明するのです。この方程式を再度、積算の形式に書き換えると、

$$z^{\lambda}=x^{\lambda}-y^{\lambda}=(x-y)(x-\alpha y)\cdot\cdot\cdot(x-\alpha^{\lambda-1}y)=b_0b_1\cdot\cdot\cdot b_{\lambda-1}$$

となります。λ 乗の数 z^{λ} が、α における λ 個の数 b_r の積に書き換えられたわけです。そこでこれらの λ 個の数について、どの二つも同じ素数(Primzahl)を共有しない、つまりどの二つも異なる素因数だけでできているという仮定を立てます（これらの素因数は観念的であっても現実的であっても構いません）。ところがこの場合、次のことが示せるのです。すなわち[まず]この仮定が充たされている場合がありますが[それはそれでよしとし]、[今度は]この仮定が充たされていなくても、求める仮定が充たされるように元の式を別のやり方で変形することはできるのです。[結局、上記の仮定の妥当性が確認されたことになります。]

[H-42]

しかし積 $b_0b_1\cdot\cdot\cdot b_{\lambda-1}$ の各因数(Faktoren)は、どの二つをとっても(sämmtlich)互いに異なる素の約数(Primteiler)しか含まないというのですから、積 $b_0b_1\cdot\cdot\cdot b_{\lambda-1}$ が λ 次[の数]であるとすれば、各因数それ自体が λ 次[の数]でなければなりません(☆)。ゆえに、各因数 b_r には 除数 $\mathfrak{D}_r^{\lambda}$（つまり別の除数 $\mathfrak{D}_r$ の λ 乗）が含まれています。そしてこの除数 $\mathfrak{D}_r$ については、それの λ 乗が α（アルファ）における現実的な数 b_r である、と言えるのです。それゆえ、もし λ がクラス数 H の約数でないなら、先述の主定理より、[今度は] $\mathfrak{D}_r$ それ自体が現実的でなければならないはずです。[逆に] 当然、この推論はこの条件下でのみ[つまり λ がクラス数 H の約数でない場合にのみ]成り立ちます。ゆえに[正と逆が成り立つ以上], λ がクラス数の約数でないなら、b_r は或る現実的な数 d_r の λ 乗に等しいのです（必要とあらば、ただ一つの除数も持たない或る他の現実的な数（つまりいわゆる「1」）をかけた上で）。ゆえに、すべての λ 個の因数について、

$$b_r=x-\alpha^r y=e_r d_r^{\lambda}.\quad (r=0,1,\cdot\cdot\cdot\lambda-1),\qquad （e_r \text{ は } 1 \text{ を意味する}）$$

という式が成り立ちます。ところが二つの未知数 x と y を含むこれら λ 個の方程式から、簡単な計算で、x と y が存在(bestehen)しないことが知られます。λ 個の方程式で、x と y が過剰限定(überbestimmt)されているからです。これでフェルマーの定理が証明されました。

(☆)「分解不可能な成分を共有しない複数の素因子の積が λ 次であり得るのは、各素因子が λ 次である場合に限る」という命題が成り立つのは、領域の数たちが分解不可能な素因子に＜ただ一通りの仕方で＞分解できる場合に限る。私の簡単な実例に戻ると、式　$(2\cdot3)(3\cdot5)(5\cdot7)(7\cdot2)=(2\cdot3\cdot5\cdot7)^2$. つまり左辺の k_0 の四つの素因子の積はある平方数に等しいけれども、四つの素因子$(2\cdot3)$,・・・は k_0 では分解不可能であり、それゆえ明らかに平方数ではない。

[H-43]

クンマーの考察によってフェルマーの問題は解決されましたが、それは 1 のλ次の根に対するクラス数 H がλで割り切れないときの解決に過ぎません。そうだとすれば、[次は]すべての素数λについて、それに見合うクラス数がλで割り切れるか割り切れないかを研究する段取りとなります。この問題をめぐるクンマーの功績としては、何と言っても次の証明に指を屈します。すなわち、H がλで割り切れるのは、H に対して容易に決まる最初の因数がλを既に含むときであると。すべての素数λ＝3,5,7,11・・・について、この因数の計算が必要となり、初めの 100 個の素数について計算を実行した結果、三つの素数、λ＝37, λ＝59, λ＝67 についてだけ、クラス数がλで割り切れることをクンマーは確認したのでした。従ってこの場合、たとえばフェルマーの方程式

$$x^{37}=y^{37}+z^{37}$$

に解がありえない、とまでは断定できないのです。最初の 100 個の素数のうち、これら[3個]以外の 22 個の素数について、あの重要な命題が一撃で証明されたというのに、そして 100 を超える範囲でもずっとたくさんの他の冪数λについてそれが証明されたというのに。

[H-44]

当然のことですが、H がλで割り切れる例外的な数の登場する頻度は、素数列を先に進むほど高くなるのでした。そこでさらに 100 個先の数まで調べてみると、13 個の素数のうち例外数がすでに 5 個も見つかります。そこでクンマーは、規則的な素数の数と不規則的な素数の数は最終的にほぼ拮抗すると見て差し支えないだろうと考えたのでした。そのためクンマーは、フェルマーの定理を考えられるすべてのケースのうちの半分について証明したと誇ることができたのでした。

[H-45]

さらにクンマーは、自らの方法の驚くべき繊細化によって、それまで取りこぼしになっていたλ=37,59,67 という大きな素数についても、フェルマーの方程式が不可能であることを証明したのでした。しかし莫大な数にのぼる、おそらくは無限個の「フェルマー問題」が今もまだ最終的解決を待ち望んでいるのであり、クンマーの跡を継ぐ一流の算術家たちの血の滲むような努力にも拘らず、彼が除外したフェルマーの方程式がただの一つも完全には解かれていないというのも事実です。当然と言えば当然ですが、一方で、この数十年にわたって観念的な数についてのクンマーの偉大な認識が著しく発展させられその精度を増したということがあります。また他方では、例外数λに関するクンマーの個別の基準が部分的に本質的な簡易化を施されたということもあります。そこで、クンマーの偉大な構想が今度こそ貫徹されるのではないかという期待が高まりつつあるのです。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

（翻訳　金田千秋　 2023.2.28）