[翻訳]

連続体(Das Kontinuum)

（解析のエレメンタの批判的研究）

ヘルマン・ワイル

翻訳　金田千秋

訳者緒言

ドイツの数学者 Herman Weyl (ヘルマン・ワイル、1885-1955)の初期の著作、『連続体（Das Kontinuum)』(1918)の日本語訳を試みる。底本は以下の通り。Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Von Dr. Hermann Weyl. Proffesor der Mathematik a.d. Eidgen.Technischen Hochschule Zürich. 1918 . (Leipzig. Verlag von Veit ＆ Comp)

翻訳に際して私がとる手続きはこうである。『連続体』は二つの章で構成されそれぞれ 8 つの節を含むが、同書の特定の箇所を指示するために（その必要度は高い)、章と節の番号を使って第 1 章第 5 節なら[1-5]と表記し、さらに精度を上げて[1-5-m] などと表記する。この場合 m とは、第 1 章第 5 節のすべての段落に、a から順次アルファベットを割り振ったときその段落に付される文字である。すなわち [1-5-m]は「第 1 章第 5 節段落 13」を意味する。
さて私がとる第二の手続きはこうである。Weyl の『連続体』は非常に読みづらい本である。もちろん「解析の基礎づけ」という主題の数学的な難しさがその主たる原因ではあるが、29 歳の Weyl は野心的にもこの基礎づけを「自然数」と「反復と再帰」だけで実行しようとしたのであって、それが本書の読みにくさのもう一つの原因となっている。すなわち、「個数」や「分数と有理数」は言うに及ばず、「実数」、「数列の収束」、「連続性」、「連続体」、「関数」、「代数的数」、「量一般」、さらに「面」さえも、彼は原理的に「自然数」の傘下に置こうとする。ところが「もっとも単純」な概念である筈の自然数による解析の再構築が、自動的に「もっとも読みやすい」解析学の基礎づけを与える保証はなく、この方針は逆に Weyl の議論を極度に難解にする結果を招いている。読者は、読みすすむ意欲を削ぐほどに抽象的な議論を、[1-4-a]から[1-4-g]まで、そして[1-6-a]や[1-6-g]に見るだろう。（ちなみに Hilbert 門下で Weyl の先輩に当たる数学者 0tto Hoelder は、Weyl に向かって「この辺の議論、生産的じゃないね(nicht fruchtbar)」と言ったことがある(Die Mathematische Methode,1924,249 頁)。
そこで話を「翻訳上の手続き」に戻すと、私は必要に応じて　　　　　のような空白部分を訳文内に置く措置をとることにした。それは Weyl において曖昧になりがちな、「ここで視点が変わる」、「話題が変わる」、「話者が変わる」等々のことに読者の注意を喚起するためである。悪文の海での長時間にわたる＜潜水泳法＞は耐え難いので、たまに水面に顔を出して息を継ぐのは悪いことではない。直接文章に当たられれば、私の言わんとするところはすぐに了解されるだろう。
 第三の手続きになるが、Weyl の文章を説明不足と判断した場合、[・・・]という仕方で言葉を補うことを躊躇しなかった。また各段落には読みやすさのために、{ ・・・}と挟む形で見出し（段落の表題）を最初に付した。原注は最後にまとめてある。

連続体(Das Kontinuum)

（解析のエレメンタの批判的研究）

ヘルマン・ヴァイル
チューリッヒ連邦工科大学　数学教授

Leipzig

Veit und Comp

内容一覧

前書き

「解析の楼閣(das Haus der Analysis)を支えてくれる<堅固な岩(Fels)>を、流行りの形式主義(Formalismus) に阿って木組みの仮設舞台(Schaugerüst)に差し替えてやれ、お歴々がこっちこそ本物の基礎(Fundament)だと思い込むように、ついでに[いまそう思っていない]自分もやがてそうだと思い込むように」・・・・[いやとんでもない]、この書物の目的はそんなことではありません。本書はむしろ、「解析の楼閣の肝心な部分が[難儀なことに]砂上に建っている(gebaut)、でもこのぐらぐらした基礎(Grund)だって、もっとしっかりした強度を持つ支え(Stütze)に差し替えることぐらいはできそうだ」、そうした思いの丈を語るのです。[ただし]この[新しい]支えが、いま人々が一般に正しいと認めている事柄をまるまる保存するとは限らず、他に打つ手もないこともあって、そうした事柄が放棄されることもないとは言い切れないのですが。

私の研究の中心にあるのは、「ピタゴラス問題」という呼称のふさわしい、例の連続体をめぐる理論的問題であって、私はそれを無理数の算術的理論で[つまり無理数を算術的に処理することによって] 解こうというのです。その基本アイデアは第 1 章で展開されますが、今回は、この第 1 章自体が一つの完結したまとまりになるように配慮いたしました。その第 1 章で立てられた一連の原理を使って、第 2 章では解析という構造体が体系的に動き出し、その[学としての]最初の活動を果たすのです。[第 1 章の]二つ目の[数学]部門では、すでに何度も述べた内容が（姿形は変わるにせよ）繰り返されるということが起こりますが、示されたイメージのまとまりを毀損しない程度にですが、繰り返しをできるだけ簡略なものに抑えました。まあそういうことはあるにせよ、教壇側[教える側]は言うに及ばず、今日講じられている解析の「厳密な(streng)」エレメンタ(Grundlagen)を学ぶ人々によって[本書が]広く受け入れられるなら、それは筆者の欣快とするところであります。

[この分野では]諸原理の探求において、或る研究者の成果のうえに別の研究者が何かを打ち立てる、という時代はまだ到来していません。だから自分の思想の体系的表現のなかに、他の研究者の同じ問題に対する立場の紹介や、他の研究者との意見交換などを割り込ませるのは適切ではありません。そこで私はそうした措置は先送りし、その方面の話題は第 1 章の結びで簡単に触れるに止めました。

本書はあくまでも数学的問題の解決を旨としますが、それでも私は哲学的な問いを無視しません。ただし、私は哲学的な問いに携わるにあたって、それを感覚主義と形式主義の粗雑かつ表面的な融合によって処理するなどというまねはしませんでした。（フレーゲが『算

術の基本法則』（イエナ、1893）で胸の空くほど明晰な仕方で攻撃したにも拘らず、このやり口はいまだに数学者界隈で高評価を得ているようですが）。論理学の認識理論的側面について言えば、私は、フッサールの『論理学研究』（第２版、ハレ、1913）の根底にある一連の見解に同意します。また論理的なるものに対して広大な哲学全体の枠組みのなかでそれが占めるべき位置を正しく指し示す、そのような深遠な叙述を含む彼の『純粋現象学と現象学的哲学のためのイデーン』（哲学現象学年報、第一巻、1913）もここに挙げておきましょう。[一方に] 直接的（直観的）な所与があり、[他方には] 幾何学と物理学においてこの所与を構成するための、（数学的テリトリーに属す）形式的な諸概念があるわけですが、連続体問題についての以下の考察は、両者の関係をめぐる認識論的な問いへの[哲学的]寄与にもなっているのです。

チューリッヒ　11 月　1917

Hermann Weyl

第一章
集合と関数
(数学的な概念形成の分析)

論理部門

§1. 性質、関係、存在

[1-1-a] {命題と判断}
判断(Urteil)は事態(Sachverhalt)を申し立てる(behaupten)。その事態が現存するなら(bestehen)、判断は真(wahr)であり、事態が現存しないなら。判断は非真(unwahr)である。事態については、[事態の]包括的カテゴリーでもないのに、しばしば他のカテゴリーを失念させるほど論理学者の心を占めてきた重要カテゴリーがあって、性質事態(Eigenschaft-Sachverhalten)[のカテゴリー]がそれである。 [ここで、事態からそれを申し立てる判断に眼を転ずれば]、対象がこれこれの性質を有する(besitzt)と申し立てる判断、すなわち性質判断(Eigenschaft-Urteil)というものがある。たとえば、「現在における或る知覚作用によって私に与えられるこの葉っぱ[という対象]は、この緑色、すなわちまさにこの知覚において私に与えられるこの緑色[という性質]を有している」[という判断]を、[性質判断の]一例として挙げることができる。 [さて次に、判断とその判断の対象の関係に眼を遣れば]、「或る性質が或る対象カテゴリーに関与的(bezogen)である」とは、いつでも、[対象] a がそのカテゴリーの対象であるときに限って、「[対象] a はこれこれの性質をもつ」という命題(Satz) [判断ではない]が有意(sinnvoll)であることを謂う。すなわち、[対象] a が或るカテゴリーの対象であるときに限って、上の命題が、[最終的には]事態の申し立てを見込みつつも(damit)、[しかし]判断を[まだ申し立てるのでなくただ]言明する

(aussprechen)のなら(nur dann)、私はそのことを指して、或る性質がその対象カテゴリーに関与的(bezogen)だと言うのである。だから、「緑色である」という性質は「視覚-物(Seh-Ding)」には関与的だが、倫理的価値には非関与的である。「これこれの倫理的価値は緑色である」は、真でもなければ偽でもなく、[いやそれ以前に] 無意味(sinnlos)だからである。判断に至るのは有意な命題だけであり、事態に届くのは真なる判断だけである(Nur einem sinnvollen Satz entsprecht ein Urteil, nur einem wahren Urteil ein Sachverhalt.)。ただ[そうは言っても]、事態[そのもの]は端的に(schlechthin)[つまり判断と独立に]在る(bestehen)、何かではあるのだが。　　　　　　もちろん＜事象に即した思惟(sachlicher Denken)が無意味な命題など生む筈がない、無意味な命題を生むのは言語依存的な思惟(ein sprachliche Denken)だけだ＞、というのはありそうな話である。しかしこの見解の成否はともかく、[有意義性の基準をめぐって]言語が以下のような危険性を孕むことは間違いない。すなわち、言語が判断の諸成分を表現する語彙記号の組み合わせ(Kombinationen)を産んだとき、[それだけではまだ]それが無意味な組み合わせに過ぎないという深刻な危険性は排除されないということ。立ち入って言えば(und zwar)、言語が、[真正な(echt) 判断でもないくせに]、形式的・文法的(formal-grammatisch)に見るかぎり真正な判断の語形成に見える、そんな組み合わせを生み出す危険性が排除できないということ。「対象 a は性質 E を持つ」のような形式を持つ命題で起こりがちなことだが、「文法的」構造(“grammatischer” Struktur)」を見る限りでは無意味な命題と決めつけることはできないものの、さりとてそれが有意味な命題と言えるかというとそうでもない、という状態があるということ。　　　　　　このことは、ちょうど判断が、論理的に背理(widersinnig)でないからと言って、つまり実質的内実(materiale Gehalt)を度外視して、純粋にその「論理的(logisch)」構造を見るだけで、非真(unwahr)と認識されない からと言って（§3 を参照)、[では]それが真なる判断の筈だと言い切れるかというと、そうでもないのと同様である。　　　　　　ところが [こと判断については事情が異なり]、命題、「[対象] a は性質 E を有する(hat)」が [もし]判断(Urteil)を言明しているのなら、それに対応する否定命題「対象 a は性質 E を有さない」にも、同じこと[すなわち、この否定命題が単に否定命題ではなく、実は否定判断を言明しているということ] が言える。しかもその場合には、「これら二つの判断のうち、かならず一方が真であり、他方が偽(falsch)である」という、形式論理学(die formale Logik)の[排中律という名の]申し立て(Behauptung)が完全に妥当(mit Recht)するのである.

[1-1- b]　　　　　　　　　　{逆理と無意味}

性質判断は、それが[性質]命題を内蔵する(enthalten)限りでのことだが、周知の＜主語・繋辞・述語＞構造(Subjekt-Kopula-Predikat Struktur)を有し、かつ、この種の命題だけがこの構造を有する。[ちなみに、この構造を持たない命題については次の段落で触れる]。しかし[直前の段落で命題一般について見たように]、上の[主語・繋辞・述語構造を持つ]命題にしても、ことと次第によっては(eventuell)無意味(sinnlos)な命題となりかねないので

あって、それをきちんと弁えないとナンセンス(Unsinn)に陥ることは、実質、ラッセルに由来する有名な＜逆理（Paradoxie）＞を見れば一目瞭然である。　　　　　　　　或る性質語(Eigenschaftswort)の意味をなす性質を[当の]性質語自体が所有するとき、この性質語は自己言及的(autologisch)と呼ばれ、[逆に] 或る性質語の意味をなす性質を[当の]性質語自体が所有しないとき、この性質語は他言及的(heterologisch)と呼ばれる。たとえばkurz[短い]という言葉は、それ自体、短い言葉であり（ドイツ語でわずか４文字の言葉を「短い」と形容するのはもちろん正当である①)、だからそれは自己言及的ではあるのだが、lang[長い]という言葉自体は長くないので、それは他言及的である。ではheterologisch[他言及的]という言葉はどちらだろうか。もしこの言葉が自己言及的なら、この言葉はそれ自体が語る性質を持つから他言及的になるだろうし、逆に、この言葉が他言及的なら、それはこの性質を持たないから自己言及的になるだろう。形式主義(Formalismus)はこうして解きがたい矛盾(ein unlösbare Widerspruch)に逢着する。だがここに姿を現しているのは実は最悪の空理空論(Scholastik)に過ぎない。[なぜなら]すこし考えればわかることだが、「heterologisch という言葉そのものは自己言及的なのか、それとも他言及的なのか」という問いに、そもそも意味(Sinn)など認められないからである。　　　—— [ただ]この論考では、事態、判断、対象、性質それぞれの本質の最終解明には立ち入るまい。この課題は形而上学的深度(metaphysische Tiefe)を有し、それについては斯学の権威に助言を仰がなければ話が始まらないからである。まあ、数学者界限で彼らの名前を口にしようものなら、気の毒そうに笑われるのが落ちだろうが —— たとえばフィヒテ(Fichte)とかね。

[1-1-c]　　　　　　　　　　{空所のカテゴリー適合性}

性質判断と並んで我々にとって重要なのは<u>関係判断</u>(Relation-Urteil)である。「あの人は私の叔父だ」、「点 P は B と C の間(zwischen)にある」、「数 5 は 4 の次である(folgt auf)」がその例である。　　　　　さて[この§1 の段落 a で] 性質命題(Eigenschaftssätze)についてしたのと同様な議論を、今度は関係判断について[正確には関係命題について]しなければならない。最後の例の[5 は 4 の次だという]関係づけ(Beziehung)は、「未確定成分(das Unbestimmte)」である x と y を含む<u>判断図式</u>(Urteils-Schema)「x は y の次である」に配属(zuordnen)することができる。そして、[上記の判断図式の]未確定成分に二つの[特定の]数が[首尾よく]代入(einsetzen)されたので、確定判断(ein bestimmtes Urteil)が得られた[という次第である]。そのとき、我々はたとえば「x =5、y=4 のとき(für)、この判断は真(wahr)だ」と申し立てる(behaupten)のである。　　　　　さてこの場合、判断図式の未確定成分すなわち判断図式の「<u>空所たち</u>(Leerstelle)」は、すべて特定の(bestimmt)対象カテゴリーに（いまの場合は「数」のカテゴリーに）関与的(bezogen)[のはず]である。図式は、空所が、[その空所が関与的である]このカテゴリーの対象によって充填(ausfüllen)されているときに限って、有意な(sinnvoll)命題をもたらし、また命題は、そのときに限

って、「それは真(wahr)か否か」という問い(Frage)と向き合う(sich erheben)のである。[ちょうど、性質（緑）が、それが関与的である対象(葉)に使われるときに限って有意な命題をもたらし、そして云々・・・のように] 。 ただ簡単のためにここでは、関係を或る判断図式に結びつけたとき、その判断図式のすべての空所が同じ(dieselbe)対象カテゴリーに関与的になるような、そのような関係だけを扱うことにする。また数学の慣例的記法に反するが、私は命題「5 は 4 に続く」と命題「4 は 5 に先立つ」は 4 と 5 の同じ関係づけを表現すると見做すので、両者を異なる二つの関係づけと見て、一方が他方の「逆(inverse)」だなどと言ったりしない。 [ただ複数の空所については注意が必要で、例の] 関係づけが結びつけられる判断図式は二つの空所を含むが、それらが「等位(gleichberechtete)」の空所ではないことは言うまでもない。二つの空所には或る列順序(Reihenfolge)が指定されるし、また[そもそも]言語的記号化の道をとる以上そうせざるを得ない。ただそうすることによって、先述の二通り[正と逆]の定式化の可能性を残したことにはなろう。とはいえ、このような列順序が関係事態(Relation-Sachverhalt)のなかに[事態として]内在して(liegen)いる訳でないことは、言うまでもない②。

[訳者。ただし、後で別の理由で空所の列順序が導入される。[1-4-e]を参照]。

[1-1-d] {数学における存在判断}

或る対象カテゴリー(eine bestimmte Gegenstandskategorie) が「直接的に与えられている(unmittelbar gegeben)」とする。たとえば「空間点(Raumpunkt)」[という対象カテゴリー]が「直観において呈示されている(in der Anschauung aufgewiesen)」とする。（当面、議論は空間点のカテゴリーの対象に限定することにしよう。）[さてその] 空間点というカテゴリーの対象たちにおいて(an)、個別の(einzeln)諸性質と個別の諸関係(R)が[直観に]呈示されている、すなわち個別に(einzeln)呈示されているとする。なおこれら諸性質と諸関係は、その[諸性質と諸関係が配属された]判断図式のすべての空所ともども、当該の対象カテゴリーに関与的(bezogen)とする（ちょうど[前段の二つ目の実例で]、「間にある(liegt zwischen)」という関係がそうであったように。） [ここで話をまとめると] 或る個別の[関係]R に割り当てられた(gehörig)判断図式が、いま関心を向けられているカテゴリーに属し、しかも[直観に]直接示された或る対象によって充填される(ausfüllen)とき、そこから性質判断と関係判断がもたらされ、こうしてもたらされる性質判断と関係判断は[判断であるがゆえに]真だったり偽だったりする、というのが話の流れである。 さてそれら[性質判断と関係判断]以外にも(neben)、数学で大きな役割を果たすものとして存在判断(Existential-Urteil)[および存在命題]というものがある。[ただし]存在(Existenz)の概念は形而上学的な謎（Rätseln）に包まれているので、この種の判断については以下の内容にとどめたい。たとえば、E(x), E’(x) ,R(xy)を判断図式(R)のメンバーとし(x,y は空所)、さらに a を[直観に]与えられた個別(einzeln)の対象とする。そのとき、

「（いま話題にしているカテゴリーの）対象で、E(x)と E’(x)の両方が妥当する(zutreffen)ような、（すなわち性質 E と性質 E’を併せ持つような）対象が存在する(es gibt)」という命題や、「a と関係づけ(Beziehung) R(xa)を結ぶ対象 x が存在する(es gibt)」という命題が、有意味(sinnvoll)だとしよう(sollen)。言い換えると(d,h.)一定の（存在）事態を[結局は]申し立てることにはなるのだが、今のところは(nun)、ちょうど、これらの存在事態が現存する(bestehen)か否かという問い③(Frage)は立てられた(die Frage ist) [でも答えはまだ出ていない]、という状態だとしよう(sollen)。 [さて数学ではお馴染みのことだが、次のような前提が、すなわち]、或るカテゴリー的本質(Wesen)に与る個別者たち(Besonderungen)が、自体的に存在する(an sich existierend)限定された対象たちの閉じた系(geschlossene System)を形成するとせよ(sollen)、という類の前提(Voraussetzung)が立てられるのは、まさに上のような情況に対応してのことと考えられる。 ——
以上の議論は、一つではなく複数の特定の対象カテゴリーを予想するような、いっそう複雑なケースへと容易に発展させることもできる。(たとえばユークリッドの幾何学で点[から出発して、いっそう複雑な]線、面に発展させるという仕方で行われたように。)

§2 判断複合の諸原理

[1-2-a] {原的と派生的}

個々の(einzeln)性質と個々の関係が、直接に[ここでは直観に]与えられているとする。この性質と関係に対応する判断図式(Urteilsschemata)を単純(einfach)あるいは原的(ursprünglich)判断図式と呼ぶ。この場合、当面、判断という言葉を[判断図式を含む]広い意味にとって、それを簡潔に「単純判断(einfache Urteile)」と呼ぶ手もある。これに同一性(Identität) J(xy)（x と y は同一である、x=y）を追加すると、以下の諸原理を介して、これら[一連]の単純判断図式たちから、複合的(zusammengesetzt)判断図式たちが[次のような仕方で]導かれる④(sich ableiten)。

1　判断図式 U からは、その否定(Negation)$\bar{U}$が導かれる。たとえば、U(xy)が「x は y に続く」を意味するなら、$\bar{U}$(xy)は「x は y に続かない」を意味する。

2　複数の空所を有する判断図式の場合、これらの各空所を互いに重ねる(zur Deckung bringen)こと、つまり同一視する(identifizieren)ことによって、新しい判断図式を得ることができる。たとえば、関係判断図式(Relationsurteil-Schema)N(xy)、「x は y の甥である」から、N(xx)、「x は x 自身の甥である」を得るように。

3　「かつ(und)」を使って二つの判断を互いに連結する(verknüpfen)ことができる。――実例はこうである。E(x)が「x は赤い」であり、E'(x)が「x は球形である」であるなら、「x は赤くて球形である」は E(x)・E'(x)と表記される。V(xy)が「x は y の父である」であり、N(xy)が「x は y の甥である」だとすると、[x,y,z]三人の関係づけを言明する合成判断「x は y の父であり、そして y は z の甥である」は、V(xy)・N(yz)と表記される。二つの判断 V と N について、一方の空所を他方の空所と部分的に重ねることによって、また「かつ(und)」という連結を発動させることによって、二つの判断から新たな合成判断が生じたのである。どうすれば当初の二つの判断の空所を重ねることができるのかというと、記号的に表現すれば、上の実例でも見たように、重なる空所に同じ文字(Buchstaben)を置けばよろしい。　　　　　　一般に、「かつ」の連結を使うことによって、二つの与えられた判断から一つではなく複数の新しい判断が打ち立てられる。それは片方の判断の空所たちを他方の判断の空所たちに、全然重ねないか、部分的に重ねるか、全部重ねるか、やり方によってさまざまである。もちろん、或る判断を次のような仕方でそれ自体と「かつ」で連結することさえ可能である。N(xy)・N(yx),「x は y の甥であり、同時に y は x の甥である」のように。

4　「かつ」による連結に次いで、「または(oder)」による連結が登場する。この連結には + という記号が使われる。たとえば E(x) + E'(x)で「x は赤い、または x は球形である」を、V(xy) + N(yz)で「x は y の父である、または y は z の甥である」を、N(xy) + N(yx)で「x は y の甥である、または y は x の甥である」を、つまり「x は y の甥または叔父である」を、という具合に。――この種の連結でも、或る判断の空所たちともう一つの判断の空所たちがどういう仕方で重ねられているのか[同一視されているのか]、を示す(Angabe)必要がある。

5　たとえば三つの空所を持つ判断を U(xyz)で表し、くだんのカテゴリー[空間点のカテゴリー]の特定の対象を a で表すと、この充填(Ausfüllung)で得られる判断 U(xya)は二つの空所だけを持つ判断となる。―――とくに、くだんのカテゴリーの或る所与の対象たちを使って(mittels)、すべての空所を充足するという仕方で、空所を含む或る判断図式から、空所を持たない充填された判断(ein ausgefülltes Urteil)が生まれる。つまり、或る事態を主張する本来の意味での判断が生まれる。

6　またこういうことがある。たとえば U(xyz)を三つの空所を有する判断とすると、[まず] U(xy※)＝V(xy)を考えることができる。それは、「(くだんのカテゴリーには、) 関係(Relation)U (xyz)を成立させるような、そんな「対象 z が存在する(es gibt)」という意味である。さらに U(※y※)は、「U(xyz)を妥当(gelten)させるような、そんな対象 x と対象 z が存在する」という意味である。――　[5 で、充填によって空所の数が減少したように]、

この原理[6]の適用によっても、判断図式の空所の数は減少する。もし空所が一つも残らないところまで、原理の適用[の繰り返し]を進めるなら、[5 と同様に]ここでも本来的な意味での判断が出現し、そこまで行けば、この判断についてあと残るのは「真か偽か」という問いだけである。実例を挙げておこう。V(xy)は「x は y の父である」、V(私、y)は、「私は y の父である」、V(私、※)は「私が父である或る人物が存在する」、「私は父である」という具合に。[実際、最後の判断については真か偽かという問いしか残らない]。

５.と６.については次の点に注意されたい。たとえば U(xy)・V (xy)=W(xy)から、a を或る特定の対象だとすると、U(xa)・V (xa)=W(xa)は導ける。しかし U(x※)・V (x※)=W(x※)は導けない。むしろ、U(xy)・V (xz)=T(xyz)とおくことによって、U(x※)・V (x※)=T(x※※)が導けるのである。[ちなみに]、原理 3.と 4.は、否定 1.を使うことによって、互いに行き来する（§3 を見よ）。

[1-2-b]　　　　　　{論理形式から論理構造へ}

単純図式たちに原理 1~6 を適用することによって、新たな判断図式を得る。また原的[つまり単純]判断図式たちと、新たに得られた判断図式とに、再度、原理 1~6 を適用することもできて、そのとき[も]新たな判断図式を得る。この手順は、先へ先へと望むだけ繰り返し、組み合わせることができる。こうして生じる判断図式の無限の集まり(Fülle)において、一つの空所を持つ判断図式を派生性質(abgeleitete Eigenschaften)の判断図式と呼び、二つ以上の空所を持つそれを派生関係(abgeleitete Relation)の判断図式と呼ぶことにする。　　　　空所を持たない判断、つまり本来の意味での判断、したがって或る事態を申し立てる(behaupten)判断⑤を、そのとき想定されている事象圏域(Sachgebiet)への配属完了判断(die einschlägige Urteile)と呼ぶことにする。こうした配属完了判断の各々について真偽の見極めが終わった暁には、我々は、[その判断が]立脚している(zugrunde gelegte)]カテゴリーの対象たちを、その対象において(an)直接に呈示された性質と関係に関して、完全に知った(vollkommen Kenntnis)ことになるのだろう。　　　　上述の諸原理は、「非(nicht)」、「かつ(und)」、「または(oder)」といった諸概念および存在(Existenz)の概念について、その論理機能(logische Funktion)を厳密な仕方で(in exakter Weise)確定した(festlegen)ものである。配属完了判断は、たとえば性質判断と関係判断と存在判断に区分され、肯定判断と否定判断に区分され、あるいはそれ以外の伝統的な[諸々の]仕方で区別されはするが、そのとき配属確定判断は[単に]論理形式(logische Form)にしたがってそう区別されたのではない。そうではなく配属完了判断は総じて非常に込み入った(sehr complex)論理構造(logische Struktur)を背負ったものなのであって、その論理構造は、判断が、単純判断図式たちに立脚しつつ(zugrunde liegend)、あの六つの原理の適用によって、どんな仕方で、どんな列順序で、どんな組み合わせで生まれたのかを述べる以外には完全な記述の望めない、そんな論理構造なのである。我々はいま、「命題はかなら

ず主語・述語・繋辞からなる」という古風な理論から限りなく遠いところにいる。

[訳者。Weyl の『連続体』には「範囲」を意味する名詞が四つ登場し、Gebiet,Bereich,Reich,Sphäre がそれである。これらはすべて「領域」に相当する意味で使われているが、異なるドイツ語には可能な限り異なるに日本語を対応させるという私の方針に従い、以下のように訳語を割り振ることにした。Gebiet（圏域）、Bereich（領域）、Reich（国）、Sphäre（テリトリー）。ちなみに頻出するのは Bereich（領域）である]。

[1-2-c] { <すべて＞ と <或る（在る）> }

先の諸原理の適用を組み合わせた例をいくつか考察しよう。まず指摘しておきたいのは、普遍性(Allgemeinheit)を表現する「すべて(all)」は、1 の「否定」と 6 の「存在する(es gibt)」の組み合わせに置き換えざるを得ないことである。「どの(jeder)対象もこれこれの性質を有する」の意味は、「これこれの性質を有さない対象は存在しない」なのである。さて、U(xy)を二つの空所 x,y を持つ関係の判断図式とすると、数学には次のような形の判断が頻出する。すなわち、「どの x に対しても、U(xy)が成り立つような、或る y が存在する。」[ちなみにこの判断に到る論理構造はこうである]。U(xy)からは、U(x※)=A(x)が作れる(bilden)。そこからその否定、$\bar{\mathrm{A}}$(x)＝B(x)が作れて、さらにそこから B(※)と$\overline{\mathrm{B}(\text{※})}$が作れる。[ところが] B(※)と$\overline{\mathrm{B}(\text{※})}$ は明らかに「空所」を含まず、それは[或る y が存在するという]申し立て(Behauptung)になっている。（この場合、$\overline{\mathrm{B}(\text{※})}$ を $\bar{\mathrm{B}}$(x)つまり A(※)と混同せぬこと!)

実例 A　対象領域として平面幾何学の点たち(Punkte)を選ぶ。E(xyz)は「x と y は z から等距離に(gleichweit entfernt)ある」を意味する。xyz が一直線上にあること（関係 G(xyz)）をこう定義する。すなわち、「p と q が、x から等距離であり、y からも等距離であり、z からも等距離であるような、そのような二つの異なる点 p と q が存在する(es gibt)」と。そのとき、原理 3.と 1.に従い、また同一性 J を援用することによって以下を得る。

E(pqx)・E(pqy)・E(pqz)・$\bar{\mathrm{J}}$(pq)＝F(xyzpq)

ゆえに F（xyz※※）＝G (xyz)である。

実例 B.　対象領域として実数たち(reelle Zahlen)を選び、f(x)を実変数の或る関数とする。そこで、「f は一様連続(gleichmäßig stetig)である」という判断を[その論理構造に照らして]分析して(analysieren)してみることにしよう。通常の定義によれば、この判断は次のことを意味する。すなわち、「任意の正数 ε に対して、或る正数 δ が、ただし不等式 I x—y I＜ δ を充たす二数 x、y に対して、かならず不等式 If(x)—(y)I＜ ε が成り立つような、そのような正数 δ が存在すること(es gibt)」を意味している。ここで

A(xy ε)は関係 I x—y I＜ ε を意味し、

$F(xy\varepsilon)$は関係 If(x)—(y)I< ε を意味し、

$P(x)$は「ε は正である」を意味するものとする。

まず 1.と 3.によって、

$A(xy\delta)\cdot\bar{F}(xy\varepsilon)=B(xy\varepsilon\ \delta)$　を得て

そこから　$B(※※\varepsilon\ \delta)=\ C(\varepsilon\ \delta)$ およびその否定　$\bar{C}(\varepsilon\ \delta)$ を得て

そこから　$\bar{C}(\varepsilon\ \delta)\cdot P(\delta)=Q(\varepsilon\ \delta)$. および　$Q(\varepsilon ※)=R(\varepsilon)$ を得る。

その否定から　$\bar{R}(\varepsilon)\cdot P(\varepsilon)=S(\varepsilon)$ を得て

そこから充たされた判断　$U(x)=S(※)$ を得る。

ところが、　「f は一様連続である」は上の判断の否定を意味するのである。

<u>実例</u> C　　続いて「f はすべての変数値に対して連続である」という命題の定義を示す。

$B(xy\varepsilon\ \delta)$は前に同じ。

$B(x※\varepsilon\ \delta)=C(x\varepsilon\ \delta)$　及びその否定$\bar{C}(x\varepsilon\ \delta)$

$\bar{C}(x\varepsilon\ \delta)\cdot P(\delta)=Q(x\varepsilon\ \delta)$.　$Q(x\varepsilon ※)=R(x\varepsilon)$

$\bar{R}(x\varepsilon)\cdot P(\varepsilon)=S(x\varepsilon)$から　$S(\varepsilon\ \varepsilon)=V$

V の否定$\bar{V}$が先の主張である。

上の実例で使用された記号法(Symbolik)にはまだるっこいという印象が否めないが、気にする必要はない。それに対して、六つの定義原理(Definitiosprinzipien)の編成は、それが<u>完全</u>(vollständig)であるという我々の認識が間違いでない限り、論理学にとって重大な意義を有する。

[訳者。言うまでもなく、この段落の実例 A に登場する文字「F」は関係の一例を表すに過ぎないが、[1-7-g]を例外として、次節の「1-3-b」以降、活字「*F*」は一貫してそこで定義される或る特殊な意味で使用される。[1-3-b],[1-5-a],[1-5-b],[1-5-c],[1-5-d],[1-6-a],[1-6-d],[2-1-a],[2-1-b],[2-6-d]]。

§3. 論理的推論(Logisches Schließen)・公理的方法(Axiomatische Methode)

[1-3-a]　{一般判断・特殊判断・個体}

[第一に]、原理 5 に訴えることなく構築された判断⑥ [つまり特定の所与の対象の充填を経ずに構築された判断]、したがって[たとえ空所の充填が行われていようと、その]充填が「<u>存在する</u>(es gibt)」による充填に限られる判断、そんな判断を<u>一般</u>(generell)判断と呼ぶ。数学が扱う判断はこのような[一般]判断に限られる[のだが、そのことは本節後半で確

認する]。ちなみに、こうした判断が存在判断(Existential-Urteil)とも呼ばれるのは、[いまの説明に照らせば]妥当なことではある。　　　　これに対して[第二に]、原理５が適用されている場合、[つまり]そのとき念頭に置かれているカテゴリーの、直接に提示された特定の(einzelm) 対象がその判断に持ち込まれている(eingehen)場合、その判断は特殊(partikulär)判断である⑦。　　　　[さらに第三に] E(x)を一つの空所を持つ判断図式とする。ただしそれは、原的[§2] 性質と[原的]関係とから生じた判断図式ではあるものの、成立に当たっては原理５の介入を受けていない[だから特殊ではない]判断図式とする。さてこの場合、もしもE(x)を成り立たせる対象 x=a が一つ存在し、また一つしか(ein und nur ein)存在しないのなら、a を(この対象の諸性質によって特徴づけ可能な(charakterisierbar))個体(Individuum)と呼ぶ。　　　　言うまでもなく、[個体にとっては]原理５が排除されていることが本質的である。なぜなら、かりに原理５が介入しているとすれば、先に J を同一性の意味にとった以上[§2 冒頭]、空所 x を含む判断図式 J(xa)は、対象 a にだけ属す[筈の]「a-であること(a-sein)」という性質を[対象 a でもないくせに]表現することになるだろうが、そのとき個体の概念は意味を失う(nichtssagend)からである。

[1-3-b]　　　　{<個体>と<等質的>}

自然数(natürliche Zahlen)の算術(Arithmetik)を例にとろう。まずこの算術はただ一つの原関係づけ(Urbeziehung)、すなわち n’ が n に直接に続く(folgen)数であるとき成り立つ関係づけ F(n ,n’)に、依存している。すると 1 は、「それ[1]が、その続きであるような、そんな[先行する]数はない（つまり数の列はそれで始まる）」という性質 I によって特徴づけられる。つまり 1 は、

$$\overline{F\,(\text{※}x)}=\mathrm{I}(x)$$

という性質によって特徴づけられる。[ところが]この性質 I を有する数が一つそしてただ一つ(eine nud nur eine) 存在する(es gibt)というのは事実(Tatsache)だから、それ[つまり性質 I を有する一つそしてただ一つの数]を 1 と名づける(nennen)。さらに、2 は先ほど定義された 1 に直接に続くという性質 II によって特徴づけられるが、この[2 を特徴づける]性質はこうである。

$$\mathrm{I}(y)\cdot F\,(yx)=F_2(yx) \quad : \quad F_2(\text{※}x)=\mathrm{II}(x)$$

3,4 以下の特徴づけも同様である。さて、[各性質を有する数は、上記のように、それぞれ一つそしてただ一つ存在するというのだから、まず]、どの数も個体(Individuum)であることがわかる。[ところが]1,2,3 は[個体であると同時に]直接に呈示された数なのだから、命題 1+2=3 は特殊判断を含むことになる。　　　　しかし[さらに]、一つの数を与えるには、実際問題として(Tatsächlich)、数列(Zahlenreihe)においてそれが占める位置(Stellung)⑧に訴える(vermöge)以外に、つまりその数にとって特徴的な性質(Eigenschaft)を挙示する(Angabe)以外に手がない。そうすると(daher)こういう解釈

(interpretieren)もあるのではないだろうか。つまり、あの[1+2=3 という] 命題は、[それが、[自然]数列において数たちが占める位置に注目していることを重く見れば]、「I(x)、II(y)、III(z)及び x+y=z が妥当するような三つの数が存在する(es gibt)」と解釈することができ、そしてその意味で(so)この命題は[特殊判断や個体判断ならぬ]、「一般(generell)」判断を含むと解釈できるのではないかと。[これが直前の段落冒頭の、「数学判断は一般判断である」という発言の根拠である]。　　　　　さて、念頭に置くカテゴリーのすべての対象が、（先ほど厳密に規定した意味での）個体であるようなケースもあり、算術(Arithmetik)がまさにそのケースだったのだが、しかしそれと対極的に(diametral)、[対象が個体でないような] こんなケースがある。すなわち、[やはり]ただ一つの空所を含む判断図式 E(x)ではあり、[やはり] 原理５の適用を経ることなく原性質と原関係から生じる判断図式 E(x)ではあるのだが、それにも拘らず(immer)、この判断図式が[当該のカテゴリーの]<u>すべての</u>(all)対象について真であるか、さもなくば<u>いかなる</u>(kein)対象についても真でないか、そのいずれかであるようなケースがある。この場合、原性質と原関係に関して、このカテゴリーは[個体的と対極的に] <u>等質的</u>(homogen)と呼んで差し支えない。たとえばユークリッド幾何学の<u>空間点</u>についても、いま述べたようなことが見られるのであり、我々が幾何学において空間を<u>等質</u>⑨と呼ぶのは、まさにこの理由による。

[訳者。＜一般的＞と＜性質＞の関係については [1-4-a] 冒頭を参照せよ]。

[1-3-c]　　　　　{論理学、すなわち自明性を担保する判断構造の探求}

[ここで論理学(Logik)に目を転ずると]、配属完了判断 [§2 段落 9]のなかには、純粋にその論理構造 [だけ]を根拠として真(wahr)と認識できるような判断が存在する。つまり、どんな対象カテゴリーが想定されているか、どんな原性質や原関係に立脚するとみなされているか、また原理 5 を適用するに当たってどんな対象が「充填」のために使用されたか等々を顧慮することなく、その論理構造のみを根拠(Grund)として真と認識できる配属完了判断が存在する。形式的（論理的）な組み立て(Bau)ゆえに真である判断、したがって実質的な(material)な内容を欠きながらも真である判断を、私は（<u>論理的に）自明</u>(selbstverständlich)な判断と呼ぶ。またその否定が自明であるような判断は背理的(sinnwidrig)な判断と呼ぶ。　　　　[ところで] U・$\bar{V}$が背理的なら、判断 V は U の「<u>論理的帰結</u>(logische Folge)」である。U が真なら、V もまた真であることは確実なのである。V が U の論理的帰結であり、逆に U が V の論理的帰結なら、二つの判断 U と V は<u>同値</u>(sinngleich)である。　　　　判断の自明性(Selbstverständlichkeit)を担保する(gewahrleisten)ような判断構造(Urteilsstrukturen)を調べ尽くすことが、論理学（つまり推論の理論）の主要課題である。[まず]一定の「基礎的(elementar)」構造を提起し、そこに[順次]細部に関わる「構成(Komposition)」を積み重ねるやり方でそのような判断構造を導くこと、それが論理学である。伝統的論理学であれ、いわゆる数学的論理学であれ、

論理学が果たして十分満足のいく形でこの課題をすでに実際に解決しているかどうか、という点には[ここでは]立ち入らない。[判断の自明性を保証する判断構造のなかから]若干の実例を挙げるにとどめよう。

[1-3-d]　　{実例}

U を或る判断とすると、$U+\overline{U}$は自明的であり、$U\cdot\overline{U}$は背理的である。判断 U と$\overline{\overline{U}}$[二重否定]は意味同値である。二つの判断 U,V の場合、U・V は $\overline{\overline{U}+\overline{V}}$ と意味同値である。U(x),V(x),W(x)を[各々]一つの空所を有する三つの判断図式とすると、三段論法の各式はこうなる。

$$\overline{U\cdot\overline{V}(※)}\cdot\overline{V\cdot\overline{W}(※)}\cdot(U\cdot W(※))$$　は背理である

ちなみに $\overline{U\cdot\overline{V}(※)}$ は次のことを意味する。すなわち U(x)が真であり、V(x)が真でないような、そのような対象 x は存在しない、と。すなわち、性質 U を有するすべての対象には、性質 V も帰属すると。

[1-3-e]　　{論理学における「形式的」と 数学における「形式的」}

論理的推論(logisches Schließen) に認識技術的(erkenntnistechnisch)な機能が備わっていることは想像に難くない。誰でも[現に]この機能は知っているし、数学において演繹的な手続き(Verfahren)がどんな役割を果たすかもよく知っている。[ところで] 数学的事態(Sachverhalte)は、極度に単純なそれは別として[一般に]極めて複雑であり、それを完全に意識(Bewußtsein)に取り込む(Gegebenheit)ことも、あるいはそれを偏りのない洞見(freie Einsicht)という形で所有することも、望んでもなかなか叶わぬことである。数学の実情はむしろこうである。　[たしかに]数学を形作っているのは<u>配属完了的で一般的で真なる</u>判断たちではあるのだが、[配属完了的で一般的で真なる]その判断たちのなかには、直接的な洞見(Einsicht)という仕方で真と認識されるような、ごく少数の、個別の、<u>公理(Axiome)</u>という名の判断たちが含まれているということ。それが数学の実情である。たとえば、U_1 ,U_2, U_3 ,U_4 という一連の判断が、いずれも少数の判断、たとえば $U_1\cdot U_2\cdot U_3\cdot U_4$からの論理的帰結であるという具合にである。　[さて] 判断 U が諸公理からの帰結だという事実を示すことができるのは、論理諸法則の特性についての先般の[§2 の]指摘を踏まえつつ、「基礎的(elementar)」推論の限なく分岐した構造体(in allgemeinen viel verzweigten Organismus)を辿るときであり、それ以外に手立てはない。ただしこの構造体は、伝達という目的も考慮せざるを得ないがゆえに、技巧を凝らして(künstlicherweise)、項と項が連鎖を成すように書き換えておく必要はある。ここが数学的<u>証明</u>(Beweis)の出番である。それは、数学ではもはや判定される事象(Sache)や事態[そのもの]が洞見を導くのではなく⑩、必要なすべての洞見は論理的推論に沿って配置される、という意味である。　(ただし、数学的真理の発見(Auffinden)やこの真理に施される解釈(Verstehen)までが「形式的」に進むかというと、その度合いはむしろ低

く、発見や解釈がむしろ「事物に即して(sachlicher)」進むことは言うまでもない。私が[形式的に進むと]言ったのは体系的表現[が形式的に進む]の意味である。）　　　　　ただ次のことには注意を喚起しておきたい。「たとえば、点、線、面についての、すべての(alle)配属完了的で一般的で真(wahr)なる判断が、幾何学的諸公理から論理的推論によって導かれる」という確信(Überzeugung)は、[あくまでも]一個の学問的な思い(Glaube)なのであって、「こうした判断が幾何学的諸公理から論理的推論によって導かれる」ことを実際に洞見(einsehen)できるという意味ではないし、まして、そのことを論理的諸法則そのものから論理的なやり方で「証明(beweisen)」できるという意味でもない。万一、いつの日か[この思いの内容の] 証明が成功するものなら(gelänge)、そのとき、このような洞見によって一本の道が、すなわち、すべての(jedes)幾何学的な（つまり配属完了的で一般的な）判断を、手持ちの(methodisch) 或る推論手続きによって（「有限回の手続き(in endlichvielen Schritten)」で)、真と偽に関して決定(Entscheideng)するための通路が開かれもしようが(würde)、そのとき数学は原理の水準で見て(prinzipiell gesprochen)いささか矮小なものに成り下がって(trivialisiert)いることだろう(wäre)。

[訳者。最後の「注意」の箇所は、後年の K・Gödel の高名な否定的成果を想起させる]。

[1-3-f].　　　　{Dedekind の切断理論における、存在概念の破綻}

近年、公理(Axiome)は規約(Festsetzungen)なりとする立場がしきりに喧伝されている。この立場はこう言うのである。たとえば、「$x^n+y^n=z^n$　となるような [正の]整数 x≠0、y≠0 、z≠0 、n>2 は存在しない と申し立てるフェルマの定理は、この判断が算術的諸公理からの帰結(Folge)だ、と[いう事態を]申し立てて(behaupten)いるのだ」と、この立場はそう言うのである。これはいわば、諸公理が「存在(es gibt)」の意味を確定するという話、[すなわち]その存在(wessen Existenz)が諸公理から論理的に帰結(folgern)できるようなもの[だけ]が存在する、という議論である。このような「仮説演繹ごっこ(hypothetisch-deduktives Spiel)」は、認識にとって有意義な意味(Sinn)を欠くゆえに、また公理がどんな意味で満たされているかという視点を欠くゆえに、一顧だに値しない代物だが、そのことは措くとしても、[認識の観点を言う以前にそもそも]この立場には論理的に(logisch)支持できない(unhaltbar)何かが潜んでいる。　　　　　一例を挙げる。まずデデキントのやり方で無理数を定義してみよう。その定義は、「或る有理数は或る無理数よりいつ(wann)小さいのか(kleiner , <)」を直接に確定している。[そこで今度は]α,β を二つの実数とし、いずれも、それにそしてそれだけに帰属する一つの性質によって、個体(Individuum)として定義されているとしよう。そのとき[デデキントによれば]、有理数 γ があって、$\alpha<\gamma$ かつ $\gamma<\beta$ となるなら、$\alpha<\beta$ だというのである。さてそこで、[公理は規約なりという]くだんの立場からこの[γ の]「存在(es gibt)」に解釈を施すと、こうなる。[すなわち]不等式 $\alpha<\gamma$ と $\gamma<\beta$ を充たす有理数 γ が存在しないことが諸公理から帰結す

るとき、そしてそのときに限って、$\beta \leqq \alpha$[$\alpha < \beta$の否定]は妥当するのだと。ところがそうすると、判断$\alpha < \beta$と$\beta \leqq \alpha$は完全な二者択一(Alternative)を構成しないだろう。なぜならこのような有理数γについては、その存在と非存在が[どちらも]数学的諸公理の帰結とならないことが十分にありうるからである。　いま瞥見したような[デデキント流の]思考方式が自らを全うできるのは、諸公理が無矛盾(widespruchfrei)で完全(vollständig)であることを我々が知っている(wissen)場合、しかも二つの＜対立する(entgegengesetzt)＞配属完了判断 U と$\bar{U}$のうち、一方そして一方だけが諸公理の論理的帰結であるようという形で、諸公理が無矛盾(widespruchsfrei)で完全(vollständig)であることを知っている場合に限られる。ところが我々はこのことを思う(glauben)ことはあり得ようが、それを知る(wissen)ことはないのである。　また、よしんばこの思い(Glaube)が洞見に転じるとしても、[そもそも]論理的推論は一定の基本的な論理的推論の反復(Iteration)である以上、我々は反復についての直観(Anschauung der Iteration)を踏まえないことには、すなわち、列(Reihe)をなした無限の継続(Fortgang)についての直観を踏まえないことには、この洞見に到達することができない。押し並べて純粋数学(Mathesis pura)は、自然数についての根源的な算術的洞見のうえに論理的に構築されるものであるが、この自然数についての根源的な算術的洞見もまた、まさに上記の[反復の]直観に依存せざるを得ないのである。

数学部門

§4.　集合たち

[1-4-a]　{無限集合の性質は、どのように挙示(Angabe)されるのか？}

有限集合(endliche Menge)は二通りの仕方で記述(beschreiben)できる。一つは個別的(individuell)記述であり、他は一般的(generell)記述である。前者は、そのすべての個々の要素(Elemente)を列挙するかたちで行われ、後者は、その集合の要素に帰属(zukommen)し、それ以外の対象に帰属しない、そのような諸性質を挙示する(Angabe)かたちで、[つまり要素的ではなく]法則的に(gesetzmäßig)行われる。　[では有限集合でなく]無限集合についてはどうかと言えば（ちなみに無限の本質はまさに無限集合にあるのだが)、[まず] 前者のような[つまり無限集合を個別的に記述するという] 方法は[当然]あり得ない。[そこで]無限集合の一般的記述の出番となる訳だが、その諸要素の「特徴的な性質(charakteristische Eigenschaft)」の候補として浮上するのは、原的(ursprünglich)性

質と、その原的性質と原的関係から§2 で見たやり方で派生する性質とである。それらが「挙示可能な(angebbar)」諸性質の圏域(Kreis)を画定するからである。　　さてそこで(mithin)[私は次の立場を主張する]。

[1-4-b]　　　　{Weyl の立場 ⇒ 集合の立場}

原的性質であれ派生的性質であれ、各性質(Eigenshaften) E には一つの＜集合(E)＞が対応する(entsprechen)。　　[そもそも]「対象 a は性質 E を持つ」という表現(Ausdrück)は、別の表現、「[a に]割り当てられた(zugehörig)、空所を持つ判断図式 E(x) は x=a で真である」に書き換えられるけれども[§1]、[性質に着目する] この表現は、「a は集合(E)の要素である」というような、[性質ではなく集合に着目する]表現と同義(gleichbedeutung)である。　　[ただし]二つの性質 E と E'に同じ集合(dieselbe Menge)が対応するのは、性質 E が帰属するような（当該のカテゴリーの）すべての対象が [同時に] 性質 E'をもち、また逆も成立するときに限る。

[訳者。この段落のいささか唐突な言辞は、Weyl のここまでの議論からの推論、帰結、結論ではありえない。二つ先の段落で「立場(Standpunkt)」と言う言葉が使われることからわかるように、この段落の内容はむしろ Weyl が採用する「集合の立場」の断固たる「宣言」、後出の言葉を借りれば「外延(Umfang)」主義という立場の断固たる「宣言」と見なければならない]。

[1-4-c]　　　　{何が集合の同一性を保証するのか}

[上の段落の最後の文に次のことを言い添えておきたい]。二つの性質の同一性(Identität)においては、（§2 の諸原理の援用によって、原性質たちと原関係たち、並びに個別の指定された対象たちから、）これら二つの性質がどのように定義(definiert)されているかという点が決定的(entscheidend)である。これに対して、二つの集合の同一性では事情が異なり、そこでは[前段の最後で見たように]、「一方の集合の要素が他方の集合の要素でもあり、その逆も言えるかどうか」といった、定義から純然たる論理的な仕方だけでは読み取ることの叶わぬ（der aus der Definition rein logisch nicht abzulesende）、いわば事象側の事情(sachhaltige Umstand)こそが決定的である。　　―― なお[この考え方から] 次のことがさらに了解される。[性質ではなく集合に依拠するこの方針をとるなら]、[1-4-a 冒頭の]、或る有限集合の個別的な(individual)記述と、[同じ]その有限集合の法則的な(gesetzmäßig)記述の間に[は、たしかにその段落冒頭に述べたような]違いがあるにはあるが、[集合という]形式から見れば(formal betrachtet)、その違いは、有限集合の個別的記述は[その同じ]有限集合の法則的記述の特殊事例(Sonderfall) に過ぎない(nur)という程度の違いに留まることが了解される。たとえば、a,b,c をいま念頭に置いているカテゴリーの三つの対象[つまり有限集合]だとすると、

$$E(x)=J(xa)+J(xb)+J(xc)$$

が「a または b または c である」という派生的性質の、その判断図式になっているが、この派生的＜性質＞には三つの対象を要素とする(bestehend)＜集合＞が[ちゃんと]対応するのである。

[1-4-d]　　　　　　　　{<集合>すなわち<関数連関>}

ここで[私が]表明しているのは、「[集合の]同一性(Identität)」は、定義や意味(Sinn)の類に準拠するのではなく、事象に即した(sachlich)妥当領域(der sachliche Gültigkeitsbereich)に準拠する(maßgebend)」という立場(Standpunkt)である。[さて]この立場は、関係や、関係の判断図式にも拡張することができる。どんな性質にもそれぞれ[事象に即した]集合が対応するように、どんな関係にもそれぞれ[事象に即した]関数連関(ein funktionaler Zusammenhang)が対応する。他にもっと簡潔で的確な言葉が見つからないことから推すと、それ[関数連関]が<関数(Funktion)、配属(Zuordnung)、写像(Abbildung)>といった一連の数学的概念の根基(Wurzel)をなすことはおのずから(von vornherein)明らかである。　　とは言え、[関数連関と言う]代わりに、空所の数に配慮しつつ 2,3,4・・次元の集合と呼ぶ言い方もあって、そのときには、いままで集合と呼んできたものは正確には「一次元集合」と表記される。　　[集合と呼ぶか、関数連関と呼ぶか]どちらの言葉を選ぶかによって、それに連携する表現方式も変わる。たとえば、a,b が二項関係 R を結ぶ場合、「a,b は[R に]対応する二次元的集合（R）の要素組　(Elementensystem)をなす」と言う具合に、[集合の側から]表現することもできるが、「それらは関数連関(R)を充たす」という具合に[関数連関の側から]表現することだってできるのである。

[訳者。ここからしばらく抽象的な議論が続く。ちなみに要素組(Elementensystem)については [1-6-b]を参照]。

[1-4-e]　　　　　{事物性は空所たちの「順序」を通じて判断に介入する}

多次元集合についてはもう一つ注意すべき重要な点がある。U(xy)と V(xy）を二つの二項的判断図式(binäre Urteilsschema)とする。さて、「U (ab)は成り立つが(bestehen)、V(ab)は成り立たない、あるいは V(ab)は成り立つが、U(ab)は成り立たない」、そんな対象 x=a, y=b が、所与のカテゴリー内に存在(es gibt)しないのなら、これら二つの関係(Relation)[すなわち関係 U と関係 V]には同じ関数連関が対応する。　　さて二つの判断図式 U と V について、いま、「 」内に掲げられた要求は、二つの判断図式それ自体の間の関係づけ(Beziehung)を表現しているのではなく、明らかに、それぞれの空所は一定の仕方で互いに完全に重ね合わせることができる(miteinander zur Deckung gebracht)という、[あくまでも事象に関わる]前提を語っている。　　ところで、一つの判断図式 U(xy)に一つの関数連関が、先の要求を満たすような仕方で対応するのなら、[それに先立って]判断

図式においては、空所たちが、あらかじめ一定の列順序で配列されていると想定せざるを得ない。このことを「主題配列的(subjekt-geordnet)」と呼ぶ。書式の観点から、この順序は、簡潔に空所たちを表現する活字たちの列の形で（通常の書法に従って左から右に）示されるが、この取り決めが効力を発揮するのは、主題配列的な二項関係以降のことである。対象 a と b が、別々の(beiden)判断図式の順序づけられた空所に、同じ列順序で代入されるというのがその趣旨である。

[1-4-f]　　　　　　　{ 空所の順序（承前）}

原的関係であろうが、派生的関係であろうが、[押し並べて]関係の主題配列的な判断図式には、一つの＜関数連関＞が、[そして名前こそ違え、中身は同じだが]一つの多次元的集合が対応する。[そして本節第二段落を踏まえてこう言える]。いま念頭に置いているカテゴリーの或る対象たちが列をなしているとき、（同数の空所を持つ）二つの判断図式が関数連関を共有するのは、[一方の判断図式に対応する]或る関係を有するカテゴリーの対象たち[の集合]が、列順序を壊さないようにして、かならず他方の関係をも充たし、またその逆も言えるときであり、しかもそのときに限る、ということ。

[1-4-g]　　　　　　　{産出の視点の可能性}

こういう事情を踏まえれば、§2 に示した[判断にまつわる]一連の原理は、[判断ならぬ]一次元ならびに多次元の集合の「産出(Erzeugung)」を統括する原理に変身する。否定（原理 1）には集合の圏域では補集合(Komplement)の構成が対応し、原理 3 と原理 4 からは二つの集合の交差(Durchschnitt)と和(Summe)が生じる。たとえば、3 項関係 U(xyz)において、z に所与の対象 a を代入すると、それに対応する 3 次元集合から断面 x=a が生じるが、それは 2 次元集合になっている。原理 6 を解析幾何学に倣って射映(Projektion)原理と呼ぶ手もあろう。

[1-4-h]　　　　　　{<直観的 (anschaulich) 対象>と<観念的 (ideal) 対象>}

一次元集合であれ多次元集合であれ、それは、原的(ursprünglich)に与えられる対象領域の上に(über dem ursprünglich gegebenen Gegenstandbereich)、[そしてここまでの論述を踏まえれば、直観(Anschauung)に与えられる対象領域の上に]、観念的対象たちからなる派生的な集合(ein abgeleitetes System idealer Gegenstände)を構築している。原的な集合から[観念的対象の派生的]集合が成立する(entstehen)この過程を、私は数学的過程(mathematischen Prozeß)と呼ぶ。　　　このような概念形成(Begriffsbildung)こそが数学的思考(mathematische Denkweise)の際立った特徴であることを、私は心底疑わない。これらの対象たち、そして[これらの対象たちの]新しい集合(Mengen)が、原的な対象なり集合なりと、徹頭徹尾、性格を異にすることに疑問の余地はない。それらは[原的な対象なり集合なりとは]まったく別の[観念的な(ideal)]存在テリトリー(Exizsenzsphäre)に

属すのである。

[訳者コメント I]　目次に掲げられた「概念形成(Begriffsbildung)」という語句が、ここで初めて本文に登場している。このことは、この箇所で数学的概念形成の理論がワンクール終了したことを告げている。[1-4-j]の冒頭の文章をみよ。
[訳者コメント II]　この段落で、Weyl が System という言葉で集合 (Menge)を表現していることに注意せよ。「数学的過程」については、[1-6-a]も参照。
[訳者コメント III]　Weyl の言う「数学的過程」は、一般に「集合化の意識」と総括することができる。それには二種類あって、ここに言う「原的な集合から派生的集合が成立する過程」がその一つであるが、Weyl はもう一つ、いわば水平的に、「原的関係に一次元集合を、派生的関係に多次元的集合を対応させる過程」も、数学的過程と呼んでいる(§6 の段落 1、この§4 の段落 2 と段落 6 と段落 7)]。要するに数学的過程とは「集合化意識一般」のことなのだろう]。

[1-4-i]　　　　　　{古代の連続問題、19 世紀の連続問題}
[話を本筋に戻そう。すでに見たように]、無限集合を記述(beschreiben)しようと企てた途端に、その集合の要素たちの特徴をなす(charakteristisch) 諸性質を挙示(Angabe)する羽目になる。無数に多くのものたち(unendlich viele Dinge)の間に配属関係(Zuordnung)を樹立しようと企てた途端に、関係づけられる対象たちを互いに連結する関係(Relation)を、すなわち法則(Gesetz)を挙示する羽目になる。　　　　　[ところが性質を挙示したり、法則を挙示しようとすると]、 気まぐれな際限なき無数の個々の収集行為(Wahlakt)によって、かき集められ(zusammengebracht)、つなぎ合わされ(kolligiert)、最後に意識の手で全体(Ganz)へと取りまとめられた(überblickt)、そんな「収集結果(Versammlung)」として無限集合をイメージすることになりかねないが、それは愚かなことである。なぜなら無限(das Unendliche)の本質には「無尽蔵(Unerschöpflichkeit)」が潜んでいるからである。　　　　そこで私はこう考えたい。「性質」から「(その性質を所有する物たちの)集合」に[視点を]移動（Übergang）してはどうだろうか。それは畢竟、あからさまな論理的(rein logisch)な視点を捨て、事物の視点(sachliches Standpunkt)に立てということである。すなわち論理的な意味同等性(Sinnesgleichheit)ではなく、事物側の一致(sachliche Übereinstimmung)に準拠(maßgebend)せよということ、つまり事物認識にのみ根拠（Grund）を置く一致（論理学者の言う「外延(Umfang)」における一致）に準拠せよということである。　　　　私が、ディリクレ以来、解析学において標準的となっている、そして昨今の流通する集合概念が示し合わせたように(gleichartig)同調する(zur Seite treten)、このうえなく曖昧なあの関数概念に対して、いま定式化したこの厳密な集合概念と関数概念をもって抗おうとしているのは、そういう趣旨である。　　　　—— 数学という構造体の主要部分、すなわち初等幾何学、算術、有理代数に特段の不都合は認められないが (in gutem Stand)、解析学と集合論 (Mengenlehre)はそうではない(例えば§6

を参照)。[たしかに] 19 世紀が古典解析学のエレメンタ(Grundlagen)に加えた周知の批判は正当であり、何人もそれに抗うことはできないし、この批判が思考の厳密性 (Strenge) に驚くべき進捗をもたらしたことも間違いない。しかし我々が古代人(Alte)の顰に倣い(an die Stelle)、同じ[解析学の諸基礎を与えるという]課題について具体的に挙げた成果といえば、究極原理(letzte Prinzipien)を注視する限り、それは古代人のそれに比べて明晰を欠き、抗弁の余地を残す体ものである。　　　―― 現代の批判的(kritisch)研究の成果の大部分が、解析学の最終的基底づけ(endgültige Fundierung)のための部材(Bauzeug)として、新たに再利用(verweten)されることを疑うものではない。しかし、現状を見るにつけても、次のことは言っておかなければならない。ピタゴラス派による無理数の発見以来、懸案となっている大きな課題、すなわち我々に直接に、（いわば流れゆく(fließende)時間と運動という仕方で）直観的に(anschaulich)与えられる連続なるもの(das Stetige)を、「厳密な(exakt)」認識の姿に定式可能な内容(Gehalt)において、しかも離散的な「諸階梯」(diskrete Stadium)の総体として数学的に把握するというこの課題は、デデキント、カントール、ワイエルシュトラスの努力にも関わらず、依然として解決を見ていないのである。どんな規約(Festsetzungen)も多かれ少なかれ恣意的なものであり、それをやりくりしたところで何の役にも立たない（[E・マッハの]「思考経済」であろうが、「有効規約」であろうが)。我々が追うべきは、事柄の洞見(Sacheinsicht)に立脚する [Fichte 的な] 解決の道でなければならない。ただ私が提起した集合と関数の概念が、解析と集合論のエレメンタ(Grundlagen)にどう反映されるのか、この点についてはなお幾許かの考察が必要と思われる。

[訳者。“Einsicht”は哲学者 Fichte の好む言葉である。]

[1-4-j]　　　　{Weyl は Cantor の超限集合論を採らない}

導入としての一般論はこれで終わりにしよう(Soviel im allgemeinen vorweg)。[さて]我々は[抽象的な演算領域ではなく]、特定の演算領域(bestimmte Operationsbereich)から出発しなければならない。[なぜなら]、実在する(existierend)集合と[実在する]配属作用(Zuordnungen)は、[我々が準拠しようと心に誓ったあの]、事物に即した連関(sachliche Zusammenhänge) によって限定されているからである。[たしかに]その連関は、連関が依って立つ原性質たちと原関係たち(Relationen)を使って[飽くまでも判断として]表現される(ausdrückbar)のだが、[しかし]その[表現される当の]連関[自体]は所与のカテゴリーの対象の間に[いわば事物的に]存在している(bestehen)のである。　　　さてそうすると、一般集合論(allgemeine Mengenlehre)の可能性はさておき(unbeschadet der Möglichkeit einer allgemeinen Mengenlehre) 、すべての演算領域に等しく妥当するような、[つまり事物からまったく独立という意味で]普遍性を持つカントール流の「無限の基数と順序数の階梯(Skala unendlicher- Kardinal- und Ordinalzahlen)」はあり得まい。

[だがそうなると]集合論によって埋められたかに見えた有限と無限の間の深淵(Abgrund)は、再び口を深く開き始めたように見える。　　　　　デデキントが著作『数とは何か』で提示した自然数の集合論的処理は、数学の体系化に関心を持つ向きには有意義ではあろうが⑪、しかしだからと言って、我々が集合論の基礎概念(Grundbegriffe)を構築するとき、[その基礎概念に]先んじて(bereits)、反復の直観(Anschauung der Iteration)と自然数列の直観に立脚していなければならない、という事実に眼を塞ぐことは許されないのである。

[訳者。この最後のくだりは Weyl 流の直観主義と見ることができる。この数年後、Brouwer への接近と離反がやってくる。ところで、この§4 以降(そしておそらく§7 まで)の議論が暫定的な議論であることに注意せよ。なぜなら§8 の段落 2 で Weyl はこう書くからである。「§4 以降は暫定的な内容なので全部を[旧版として]破棄し、あらためて関係構成の諸原理の最終版をお示しする」と]。

§5. 自然数　リシャールの二律背反

[1-5-a]　　　　　{自然数は既に「観念的(ideal)」な存在である}

自然数(natürliche Zahlen)と[普通]呼び習わされている[あの]カテゴリーは、[ある意味で]観念的な(ideal)対象のカテゴリーなのであって、ここまで準備してきた一連の考察がこの自然数に適用できるのもまさにそれが観念的対象だからである(Wir können unsere Ausführung insbesondere anwenden auf jene Kategorie idealer Gegenstände,die wir natürliche Zahlen nennen)。[実際] この[自然数という]カテゴリーは、二つの自然数 x,y の間に成り立つ(bestehen)、<y は x に直接に後続する(nächstfolgen)>という原関係づけ $F(xy)$に立脚するからである。ただし[この場合の]原関係づけは、直接的に呈示的な意味(Sinn)を持つ単一の原関係づけ (einzige,ihrem Sinn nach unmittelbar aufzuweisende Urbeziehung)であることに留意されたい。　　　　さて、この原関係づけに認められる単純な諸事実(die einfachen Tatsachen)は、以下の通りである。まず、どの数 x に対しても、それとの間に $F(xy)$が成り立つような、一つそしてただ一つの y が存在する。[さらに]どんな数にも直接に後続しないような、一つそしてただ一つの数 1 が存在する。ただし、1 以外の数についてなら、それが直接に後続するような[別の]数が、一つそしてただ一つ存在する。最後に、1 から出発し、各数からそれに直接後続する数に進むことによって、最終的には任意の数に到達することができる。例の重要な完全帰納推論(Schluß der vollständigen Induktion)はこの事情に依拠している。

[訳者。冒頭の<観念的(ideal)＞という言葉に注意せよ。自然数も、見方によっては (つまり潜在的には)、すでに数学的過程を踏まえた一個の観念的存在なのだと。]

[1-5-b]　　　　{純粋自然数論}

[さて]数学のあらゆる分野(Disziplin)には次の特性が[あまねく]認められる。すなわち、1)どの分野も、本書が当初から前提してきた演算領域(Operationsbereich)に立脚していること(zugrunde liegen)、2)この演算領域には、自然数と、自然数を[相互に]連結する関係づけ(Beziehung) *F* が、かならず紐付けられていること(assoziiert)、3) しかも[自然数とそれを連結する関係づけの]この組み合わせからなる(kombiniert)演算領域のうえに、お望みとあらば(ev.)、数学的過程を任意回(beliebig oft)反復することにより、集合の姿をとるにせよ、関数連関の姿をとるにせよ、新しい(neu)観念的諸対象(ideale Gegenstände)の国(Reich)を打ち建てることができるということ。　[さて] 数学的分野の輓近の発展もあってか、人々は、数学を<数と空間に関する教説>とする旧来の理解では狭きに過ぎるのではないか、という疑念を抱き始めている。しかし純粋幾何学、位置解析(Analysis situs)、群論等々といった[新しい]分野でさえ、[むしろ]そこで扱われる対象に自然数が初めから(von vornherein)関係づけられている(in Beziehung bringen) ことに疑問の余地はない。そこで私はここから先、次のように前提する(voraussetzen)。すなわち、一つの対象カテゴリーに立脚するにせよ、複数の対象カテゴリーに立脚するにせよ、以下の研究では、これらの対象カテゴリーは畢竟、自然数の対象カテゴリーなのだ、と。[なお]ここで私は、[組み合わせからなる]複合的領域についても、§1 でした注意を、すなわち原的な関係(Relation)であれ派生的な関係であれ､関係の判断図式のすべての空所は、あまねく、それに固有な特定の対象カテゴリーに関与的(bezogen)である、という注意を繰り返しておく。　——さて 基礎に置かれる演算領域が、本節[§5]の冒頭で説明した自然数の演算領域だけであり、それに何一つ付け加える必要がないのなら、そのとき我々は純粋数論(reine Zahlenlehre)を、しかも数学の核心(Kernstück) としての純粋数論を手にしている。純粋数論の一連の概念と事実が、すべての数学部門において枢要な役割を果たすことに疑問の余地はない。

[1-5-c]　　　　{反復と再帰}

[このように]自然数たちが演算領域に組み込まれたことによって、§2 で挙げた一連の定義(Definitionsprinzipien)に、数学以外では眼にしない(spezifisch mathematisch) 或る重要な原理が新たに参入する。反復原理(Prinzip der Iteration)、つまり＜完全帰納法による定義＞の原理がそれである。或る演算領域が基礎に置かれてはいるが、それが自然数でないカテゴリーの領域である場合がある。そのとき、この演算領域の対象たちを自然数に結びつけて(Verbindung)くれるのが、この[反復]原理なのである。純粋数論で、たとえば *F* から基本的な算術的関係、

m<n　|　m+n=p　|　m・n=p

が導けるためには、この反復原理が必要である（第二章、§1 を参照されたい）。また幾何学のエレメンタ(Grundlagen)の場合、そこに反復原理を持ち込むのは測定(Messen)を根拠づける(Begründung)ためである。測定とは、或る三つのベクトル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ の関係 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ から、関係 $n\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$（n は任意の自然数）を導くことである。最初の関係 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$を $\sigma(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$、二つ目の関係（n は任意の自然数）を $M(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,n)$とおくと、以下の手順に従って後者 [$M(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,n)$] を前者 [$\sigma(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$] に再帰的に(rekursiv)帰着させることができる。すなわち、

$M(1)$は「$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$」、つまり $J(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$を意味し、

$M(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, n+1)$は、「$M(\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\,n)\cdot\sigma(\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{b})$ が成り立つような、ベクトル$\mathfrak{x}$が存在する」を意味する、という具合に。なお、ここで新たに参入する反復原理の一般的定式化は§7 に譲らざるを得ない。

[1-5-d]　{<リシャールの二律背反>の吟味と<カントールの対角線論法>の吟味}

周知のようにリシャールの二律背反(Richardschen Antinomie)はカントールの可算(Abzählbarkeit)の概念に起因するが、その[可算性]概念は自然数列に依存している。[したがって、自然数領域の上に数学的概念を構築すると腹を決めた以上、この二律背反を瞥見しておくことは時宜に適っている]。　一般にこの二律背反は次のように説明される。「[そもそも]有限個の活字たち(Buchstaben)の可能な組み合わせ(Kombination)は可算集合を形成する。ところが各実数は[それぞれ]有限個の言葉(Worte)で定義(definieren)できるはずである。そうすると実数もまた可算個しか(nur abzählbar viel)存在しないことになるが、それはカントールの古典的定理とその証明に矛盾するのではないか、と。　さてこの二律背反を吟味するために、[私はまず]「実数」の概念を「自然数たちの[或る]集合(Menge natürlicher Zahlen)」という概念に置き換え、さらに立脚すべき(zugrunde legen)演算領域として、自然数たちとそのただ一つの原的関係 *F* を採用することにする。　ところで、自然数はどれもこれも個体(Individuum)なのだから、[件の演算領域で]派生的性質と派生的関係を構築する場合、[所与の対象の充填に関わる]§2 の原理 5 はまったく無視して差し支えない。そこで[その原理 5 の]代わりに、まだ定式化は済んではいないけれども、[前述の]反復原理をこの演算領域に追加すると、次のような確認に至るだろう。　すなわち、[§1-2-a の六つの原理について、しかもその 5 番目を反復原理に置き換えた演算領域において]、派生的性質と派生的関係に対応する判断図式たちが産出される訳だが、この「産出過程(Erzeugungsprozeß)」を[仔細に]見ると、そこには、＜判断図式そのものたちを「可算な(abgezählt)」列(Reihe)の形で順序づける(ordnen)規則(regeln)＞が働いていることを確認することができる(Es ist dann gewiß,daß sich der Erzeugungsprozeß der Urteilsschemata der abgeleiteten Eigenschaften und Relationen so regeln läßt, daß diese dabei in eine abgezählte Reihe geordnet werden.)。　　　　　さて§4 によれば、産出される[或る]性質には一次元の[或る]数集合(eindimensionale Zahlmenge)が[それぞれ]対応する筈だったから、それとまったく同じ意味合いにおいて、上述の[産出]過程を通じて、自然数たちのあらゆる可能な集合たちが、これまた(auch)、可算列(abgezählte Reihe)の形で順序づけられることになってしまう。私には、これこそがリシャールの二律背反の核心部分(richtige Kern)であるように思われる。私は[いま]、産出原理を援用しながら、リシャールの言う「有限的定義」の概念を事物の側から明確化(sachliche Prazisierung)することによって、その[核心部分の] 正体を暴き出した(herausschälen)のである[すなわち、自然数たちのあらゆる可能な集合たちが、これまた(auch)、可算列(abgezählte Reihe)の形で順序づけられるとする、その議論の正体を]。　　　　　これに対して(dagegen)、[リシャールも書くとおり]すべての数集合たちの可算性 [つまり実数集合の可算性]はカントールの証明で反駁される(widerlegt)のではあるが、それは、[私見では、カントールが考えていたのとは]まったく別の意味合いで、そして数学以外ではまず眼にしないやり方で反駁されるのである。　　　　[この場合すべては]、私が提示した演算領域に[そもそも]次のような特性を持つ二項的数関係 R(xy)が見つからない[ことに帰着する]。どんな二項的な数関係[がないの]かというと、以下のようである。(或る派生的性質に対応するような)、どんな（一次元の）数集合を出されても、その性質 R(xy)を持ち出しさえすれば、一つの数 a が、またそれとの関係で性質 R(xa)とがとれて、その性質 R(xa)に対応する数集合が元の[一次元の]数集合と同一(identisch)になるようにできるという、そんな特性を持つ二項的な数関係[R(xy)]は、[私の演算領域には]存在しないのである。つまり、a との間に関係づけ R(xa)を結ぶすべての[自然]数の集合が、元の[一次元の]数集合と同一になるようにできるという、そんな特性を持つ二項的な数関係など存在しないのである。　　　　　カントールがこの命題に施した証明の決定的な一歩は、ひとえに彼が性質$\overline{R}$(xx) に対応するような数集合を認めた(betrachten)点にある。[だが生憎]、この性質に或る数 a が求める仕方で割り当てられる(gehören)ことは、[私の体系では]あり得ない。　　　　　先程の実例の教えるところに従って可算性概念を捉え直すならば(Fassen wir den Begriff der Abzählbarkeit der Anweisung dieses Beispiels gemäß)、当然のことだが(natürlich)、「どんな無限集合に対してであれ、＜お前はこれこれの可算な部分集合を含んでいなければならない(in jeder unendlichen Menge ein abzählbare Teilmenge enthalten sein müßte)」、と決めつける理由はどこにもないのである。私がこの結論を前にたじろぐことはない。

§6. 数学的過程の反復(Iteration)
—— 解析の悪循環 ——

[1-6-a]　　{<絶対的演算領域>から<第一階演算領域>へ}

演算領域(Operartionsbereich) から出発すること、それが我々のやり方だった。つまり、[一方で] 基本カテゴリーという名の一つないし複数の対象カテゴリーを持ち、[他方で]そのカテゴリーたちの対象たちにおいて直接的に呈示される個々の「原的」性質および「原的」関係を持つ、そんな演算領域から出発するのが我々のやり方だった。　　さて[注意すべきは、この] 原的関係であれ、[先に§2 で告知した、そしてここでやがて触れる]派生的関係であれ、関係のどの「空所」も[押し並べて]それぞれ特定の対象カテゴリーに関与的(bezogen)であり、そしてこのカテゴリーの対象だけが当該の空所の充填に有意に(sinnvollerweise) 適合するのだった。　　さて[話を冒頭に戻すが]、「自然数」のカテゴリーとそれに関与的な原的関係 F を併せたものを、絶対的(absolut)演算領域と呼ぶことにする。ここに絶対的と言うのは、 もし或る演算領域に立脚(zugrunde liegen)するのなら、当然のように(in einem ohne weiteres verständliche Sinne)この絶対的演算領域にも立脚する、というほどの意味である。　　さて原的な性質と原的な関係から、派生的な性質と派生的な関係が生じることはすでに見たところである[§2]。また原的関係には一次元集合が、また[新たに生まれる]派生的な関係（ここでは主題配列的(subjekt-geordnet)とする）には多次元集合が、それぞれ数学的過程(mathematischen Prozeß)を通じて対応することもすでに見たところである[§4]。　　そこで[先ほど＜注意すべきは＞と切り出したあの箇所に立ち帰って、再び対象カテゴリーに眼を遣ると]、 [上記のように、数学的過程を通じて生まれる] これらの[多次元]集合(ein solche Menge)には、一体どんな[対象]カテゴリーが割り当て(gehören)られるのだろうか、という疑問が生まれる。　　さて[一般にそれを決める要素は二つあって]、一つはその集合の端緒となる関係(Relation) [次項 1-6-b を参照] に備わる空所の個数であり、[もう一つは、これらの空所たちが (列の順番 (Reihenfolge) も込みで) 関与的な、そんな対象カテゴリーたち[の具体的内容]である。　　—— これらすべての[派生的な]性質と関係、およびそれらに対応するすべての集合と関数連関(funktionale Zesammenhänge)を、当面、正確を期して＜一階(1.Stufe)の＞と表記する。

[訳者。

(1)＜多次元的(mehrdimensional)＞という言葉は「関数連関」ないしは「派生的」に関わる概念である。その初出は形式上は[1-4-e]だが、実質的には[1-4-d]にすでに登場し、そこで定義も与えられている。この言葉は、以後、[1-4-f]、[1-4-g]、[1-4-h]にも登場する。

(2)「多次元的」が、多変数や多変項という意味でなく、あくまでも「派生的」性質と「派生的」関係の属性であることに注意されたい。

(3)「関数連関」という言葉は[1-4-d]で既出だが、厳密な定義は後で与えられる]。

[1-6-b] {高階の演算領域へ}

[ところで多次元の派生的集合はいったいどんな(多次元の)対象によって充たされているのだろうか]。「集合 M が [もとの] 或る集合の要素組(ein Elementensystem) a、b・・・たちの集合である(daß a,b・・・ein Elementensystem einer Menge bilden)」ということは、集合 M と、[もとの]対象たち[の組]a, b … の、関係(Relation)に他ならない。[だから集合 M を知りたければ、この関係を知ればよい]。 活字 ε でこの関係を表わすが、当然(also)、この関係[ε]の空所の一つを、一階の集合(Menge)の或るカテゴリーに関与的と設定して差し支えない。また [関係 ε の] それ以外の空所たちは、件の[対象]カテゴリーの或る集合が有する空所たち（ないしは集合たちが対応する関係が有する空所たち）が関与するのと同じ基本カテゴリーたちに、列を乱すことなく(der Reihe nach)、関与的として差し支えない。 こうして[カテゴリーとしては]、基本カテゴリーたちに加えて、[前段で見たあの]一次元および多次元集合たちからなる、さまざまなカテゴリーたち(die verschiedenen Kategorien ein- und mehrdimensionalen Mengen)が得られたのであり、また、基本カテゴリーに関与的であった原性質と原関係に加えて、この基本カテゴリーの諸対象と[上述のさまざまな]集合たちを結びつける、そんな関係 ε (die Relation ε , durch welche die Gegenstände jener Grundkategorien mit dem Mengen verknüpft werden)が [新たに] 得られたのである。こうして演算領域の拡張版(ein erweiterter Operationsbereich)が得られたことになる。 さてこの拡張された演算領域には「数学的過程」を適用することができるし、その結果、[数学的過程の集合形成機能ゆえに]、今度は「<u>二階の集合たち</u>(Mengen 2.Stufe)」が得られるだろう。もちろん――飽くまでもこの話はまだ一般論として聞いて欲しいのだが(allgemein zu reden) ――それは一次元集合だったり多次元集合だったりする。すなわちこれらの二階の集合においては、[その集合の要素の]一部の空所は基礎カテゴリー[の要素]に、他の一部の空所は一階カテゴリー[の要素]に関係づけられている。[なお以上の話を数学的過程の側から見れば]、数学的過程はこういう仕方で一回だけでなく任意回数だけ反復することができる[ということでもある]。

[訳者。

(1) 段落末尾に置かれた ”allgemein zu reden” という字句を、読み流してはならない。この言葉は、本段落[1-6-b]で導かれた内容が、次の段落[1-6-c]で語られる具体論のための「前座」であることを意味する。すなわち Weyl はこう言っている。ここまでの議論から、たしかに、本段落[1-6-b]の結論 ―― これらの二階の集合においては、[その集合の要素の]一部の空所は基礎カテゴリー[の要素]に、他の一部の空所は一階カテゴリー[の要素]に関係づけられている 、という一般的結論 ―― が導かれはするものの、正当な（具体的にはパラドックスに蝕まれていない）高階演算領域に達したけ

れば、前者つまり「基礎カテゴリー」の削除が必要不可欠であり、その間の事情を詳らかにするのが次の段落[1-6-c]なのだ、と。

(2)この段落冒頭の<Elementensystem=要素組>という言葉は紛らわしい。まず a,b,…の各々、つまり a なら a，b なら b,・・・のそれぞれは、元を糺せば何らかの集合の要素たち(Elemente)ではある。だがここで a,b,…は一つのまとまりとして、つまり組(System)として扱われていることに注意せよ（現代なら(a,b,c,…)と書くところか）。そしてこの一つの組(System)が、新しい集合 M の一つの要素(Element)だというのであり、裏を返せば、集合 M は組(System)たちの集合だというのである。確認する。Elementensystem とは、「(或る集合の）要素たちの一つの組」＝「要素組」であり、このような組(System)たちが集合 M を構成すると。(なお Eementensystem という言葉は少し先の[1-6-g]で重要な役割を果たす。)

(3)話が後先になったが、Weyl はここで System という言葉を現代的な「体系」という意味ではなく、そのギリシア語源＝syn(一緒に）＋st（立つ）＝「共立する・並立する」に立ち返って、「組」あるいは「対」の意味で使っている。

(5)さらに Weyl の『連続体』では、System だけでなく Paar という言葉も「組（対)」に近い意味を担うことがある。System（ご覧のように「組」と訳すが） については[2-2-j]、[2-3-m]、[2-3-n]を、Paar については [2-8-b]を見られよ]。

[1-6-c]　　　　{高階の演算領域（ラッセルの逆理へ）}

ところが次の事実は無視できない。[前段の]二階[の演算領域]でのことだが、[数学的過程によって] 新たに生まれる集合のなかに、それの[もとになる関係の]空所がどれをとっても基本カテゴリーたちだけに関係的であるような、そんな集合があり得る。　　　その中でも顕著な例はこうである。拡張された演算領域に割り当てられる関係 R は§2 の諸原理に従って構築されるが、その構築に際して、一階の集合たちから成るカテゴリーたちに関与的な空所たちの方は、「＊(存在する)」によって充填されるものの、R 自体に属すそれ以外の[つまり二階の集合たちから成るカテゴリーたちに関与的な]空所の方は、「＊(存在する)」によって充填されてない場合がそうである。この場合、この（二階の）関係 R が存立する(bestehen)かどうかは、或る集合が存在する(es gibt)かどうか、具体的に言えば「二階の関係 R を存立させるという」役目(Beschaffenheit) を持つ一階の関係(Relation)が存在する (es gibt)かどうかに掛かっている(verknüpfen)。だがこの一階の関係は[文字通り]一階の関係なのだから、この一階の関係とあの二階の関係 R はまったく異質である。[だから]、まさに「上記のような役目を持つ[一階の]関係が存在すること」にその存立が依存する[二階の]関係[R の存在]を、階層の違い(Stufenunterschiede)を顧みず口にする輩は、果てしない循環(Zirkel)に巻き込まれるのがオチである。ちょうどラッセルが、「自らを要素に含まないすべての集合たち、の集合」というパラドックスの形で、その無意味と矛盾を暴いたように。(現代の解析学が至るところでこのような循環に巻き込まれているというのが私の所見であり、この件はすぐ後で詳細に論じる。)　　　　[さて、以上

の考察からどのような教訓を引き出すことができるだろうか]。[上記の]関係 R の形成に当たっては、「存在する」の充填を司どる原理 6 が、[一方では]基本カテゴリーに関与的な空所に、[他方では]一階の集合の或るカテゴリーに関与的な空所たちにという仕方で、ひとしなみに適用されてしまった結果、存在概念(Existenzbegriff)もまた、[一方では]基本カテゴリーの対象たちに、[他方では]（一階の）関係たちにという仕方で、[これもまた]ひとしなみに(in der gleicher Weise)適用されてしまったのである。　　　　　　[そこで、前者が存在概念に深く関わり、それに比して後者がそうでないという事実に鑑み]、存在概念の適用は基本カテゴリーの諸対象に制限する(beschränken)のが自然(natürlich)だろうし、また数学的過程を反復(Iteration)するに当たっても、二つの充填原理 5 をつねに基本カテゴリーに関与的な空所に限って使用するのが自然というものだろう⑫。そこで、この「狭い手続き(engere Verfahren)」を採用した以上、基本カテゴリーの対象たちの集合、および基本カテゴリーの対象たち間で成り立つ関数連関と言えば、当然、それは[自動的に]一階の集合および一階の関数連関のことと決まってしまうし(erschöpft)、さらに二階あるいはもっと高階の集合および関数連関でも、[低階の集合と関数連関が、それより]高階の集合と関数連関に顔を出す(hinzukommen)ことはなくなるのである。したがって、[いったん]狭い手続きをとってしまえば、我々は[ラッセルが唱えた階層の区別それ自体に賛同するに吝かではないが]、ただ[ラッセルのように]、或る階層と別の階層が異なるからといって、これらの階層に対して[階層が異なるという以上の]区別をことさら持ち込む必要はないのである。それもこれも、或る集合が割り当てられるカテゴリーが決まりさえすれば、この集合が置かれる階層も[件の狭い手続きによって]自動的に決まるが故である。たとえば三次元の集合を例にとると、初めの二つの空所が基本カテゴリーに関与的で、最後の空所が基本カテゴリーの諸対象の一次元集合に関与的なら、[前者を無視して]この三次元集合は二階に数えるべきなのである。——

[訳者。　B,Russel に対する Weyl の屈折した関係に注意せよ。Weyl は「階層区別」の必要性を認める点ではラッセルに一致し、ただ、階層区別の「仕方」について見解を異にするのである。後者について付言すれば、Weyl はラッセルのやり方（タイプ理論）を recht abstruse Auszug(非常にわかりにくい回避策)とみなし（Weyl の論文、『数学の今日的認識状況(Die heutige Erkenntnislage der Mathematik)』,III,1925 を見よ）、代わって上記の「狭い手続き」を提起したのである。[1-6-g]、[1-6-h]も参照せよ]。

[1-6-d]　　　　　　　　　　{有理数}

[次に] ここまでの考察を 解析のエレメンタ(Grundlagen der Analysis)に応用する作業に進むことにしよう。抹消的なことに時間を割くのは本意でないから、ことの起こり(ab ovo)つまり自然数から説き起こすのはやめにして[つまり自然数から出発して有理数に到るまでの部分は端折ることにして]⑬、有理数から直に出発する。　　　　　そのと

き、立脚する(zugrunde liegende)ことになる演算領域は[結局]こういう形をとるだろう。1.「自然数」のカテゴリー、並びにそれに関与的な二項関係(binäre Relation) *F*。 2.「有理数」のカテゴリー⑭、並びに[それに関与的な]三項関係 σ(xyz): x+y=z, π(xyz): x・y=z 、並びに性質 P(x):「x は正である」。なお、[P(x)の]空所はこの[有理数の]カテゴリーに関係づけられるものとする。

[1-6-e] {実数}

[自然数と有理数はそのように扱うとして、では実数はどう扱ったものだろうか]。デデキントに倣って、<u>実数 α</u> を、α よりも小さい有理数たちの集合(die Menge derjenigen rationale,welche kleiner sind als α) と考える。つまりこう定義する。＜実数とは、以下の一連の性質を有する、有理数たちの（一次元的）集合 α を謂う。すなわち、a) r を[集合] α の要素とすると、r-r'が正であるすべての有理数 r'も、[集合] α の要素である。 b) [集合] α のどの要素 r に対しても、r*-r が正になるような、それでいて要素としては集合 α に属すような、そのような有理数 r*が存在する。 c) [集合] α には要素が存在し[つまり α は空集合でなく]、また[集合] α の要素でないような有理数が存在する[つまり α は全体集合でない]。

[1-6-f] {大小関係}

[有理数] r が[実数という名の集合] α の要素である状態を、言語的には「r は α より小さい」と表現し、記号的には $r < \alpha$ と表記する。

[1-6-g] { 正しい階層概念に基づく「関数」の概念へ }

ところで [[1-6-c で]我々が、演算領域の高階化を論ずる過程でたどり着いた、あの<狭い手続>に照らすとき]、この[デデキントの実数の定義に登場する] 集合(Menge)の概念はどう理解したら良いものだろうか。 [そもそも]数学的過程を<u>一度</u>(einmal)運用するだけで、解析学にたどり着くことはない。[解析学にたどり着くには]、実数(reelle Zahlen)の研究だけでは足りず、実数の集合(Mengen reeller Zahlen)の研究、さらに実数の集合の、その集合どうしの関数連関の研究が必要だからである。 さてそこで[先に、演算領域の高階化に際して行ったように]、我々はここでも(nun)[つまり解析学にたどり着くためにも]、「狭い手続き」の反復(Iteration)[というあの立場]に就くべきなのか、それともそれは必要ないのか? [訳者。つまり、或る集合が割り当てられるカテゴリーが決まりさえすれば、その集合が置かれる階層も自動的に決まる、ということが反復して起こるとする立場に（解析学にたどり着く過程でも）就くべきなのか、それともそうではないのか?]。もし、この[狭い手続きの]反復[の立場]に就か<u>ない</u>なら、我々を待ち受けているのは[確かに]「階層化を容認する(mit Stufenbildung)」解析 [であるとはいえ]、[それは]一階、二階、三階・・・の実数が存在し、同様に一階、二階、三階・・・の関数も存在し、しかも、

たとえば二階の関数は一階と二階の変数値に、そしてそれに限って意味を持つという、そのような階層形成を容認する解析、ということになるだろう。　　　　たしかにこんな解析学でも我々になじみ深い解析学にならない訳ではない。集合と関数連関が（具体的には、「存在する(es gibt)」という言葉と結びつきながら）話題になる場面で、「一階（二階・・・）」というくだりを無視しても差し支えないとするなら、そして、二階の性質は、一階の性質たちの総体(Gesammtheit)を踏まえて初めて(erst)定義可能な筈なのに、二階の性質が[一階の性質たちと独立に]あたかも端から一階の性質たちの原的な圏域(Kreis)に収まっていたかのように振る舞うなら、この解析学も我々になじみ深い解析学に一致しなくもないのである。　　　　とは言え、まさにその振る舞いによって、一切の定義と証明は悪循環(circulus vitiosus)の渦に巻き込まれる。たとえば M を一階の実数たちの、上界を持つ(beschränkt)集合とせよ。この集合の上限(obere Grenze)を構成するためには、「M に属すような、しかも r[アール]より大きい一階の実数が存在するとき、そしてその時に限って、有理数 r[アール]が要素として属すような、そんな有理数たちの集合γ[ガンマ]」を構成しなければならない。[たしかに]この集合γは性質 a),b),c)を有するから、γは実数ではある。ところが、この実数の定義には、＜一階の或る実数＞――つまり＜有理数たちの一階の集合＞あるいは＜一階の原的ないしは派生的な性質＞―――と結びつく形で「存在する(es gibt)」という契機が含まれており、だから実数γは[実は]二階の実数なのである。――[それに加えて]それ以外の集合概念および関数概念も混沌とした性格を帯びており、それが前述の悪循環を[さらに]見えにくくしている。　　　　この悪循環は、解析学の構成上のお手軽に除去可能な形式的欠陥などといった[甘っちょろい]ものではない。この悪循環の根源的な意味の認識には、どれほど言葉（Wort）を尽くしても読者に伝えることのできない何かが潜んでいる。それどころか、解析学の論理的組成が判明に(deutlich)意識されればされるほど、そして意識の眼差しがこの論理的組成を完全かつ根源的に明察(durchschauen)すればするほど、かえって、昨今の基礎づけの動向を見るにつけても(bei der heutigen Begründungsweise)、[解析学という]この巨大な生物(gewaltige Organismus)が、その細胞の一つ一つまで矛盾の病毒によって蝕まれている事実が明らかとなるばかりである。この病毒の除去のためには、[形式的な欠陥の手直しなどではなく]徹底管理(durchgreifende Kontrolle)が必要なのである。

[訳者。Weyl は段落末尾で「矛盾の病毒」と「徹底管理」に言及しているが、それはおそらく単なる言葉の綾ではない。『連続体』の執筆がスペイン風邪(1918 年)の世界的流行の直前であったことが、それに関係していないだろうか。スペイン風邪の発端を 1889 年のロシア風邪に求め、第一次世界大戦(WWI)がそれを世界中に拡散したとする有力な説がある。その大戦末期に短期的ながら兵役にあった Weyl が、この病気についてリアルな不安を抱えていた可能性は高い]。
[訳者。この段落中盤の議論は、要するに「有界な集合はかならず上限を持つ」という命題の不成立を語っている。次の段落[1-6-h]を参照]。

[1-6-h]　　　　{数学における理念化(Idealisierung)は応用数学にまで影響する}

[前の段落で批判的に言及したあの]「階層化(Stufenbildung)」を許容する解析学は、[私の唱える＜狭い手続き＞に比べると]わざとらしく(künstlich)使いものにならない(unbrauchbar)。それは解析学本来の認識対象である「数(Zahl)」を見失っている([原著]21ページの注 [つまり本節最初の脚注] を参照)。明らかに別の方向性が求められているのである。すなわち、存在概念の適用は基本カテゴリー（今の文脈では自然数と有理数のカテゴリー）に限定し、[決して] 性質と関係の組(System)や、それらに対応する集合たちおよび実数たち等々の組との絡みでは、これを適用しないことが求められている。狭い反復操作に就くこと、それが唯一自然なやり方なのである。　　　　[しかしそれだけではない]。もう一つ、これは[数学の] 応用(anwenden)分野で決定的な役割を果たす論点なのだが、こうした「精度解析(Präzisionsanalysis)[真の値と測定値の差の極小化に携わる応用数学的技法のことか?]」に登場するあらゆる概念、事実、量、演算のなかに、一個の理念化(Idealisierungen)を見ること、[正確に言えば]それらのなかに、[概数(Ungefähr-Zahlen)」演算に携わる近似数学(Approximationsmathematik)に登場する、[概念、事実、量、演算と]類似の内容の理念化(Idealisierungen)を見ること、こうした可能性を請け負う(garantieren)のは、[存在概念の適用を基本カテゴリーより上にまで拡大しない、あの狭い]手続きなのである。その場合、もちろん、上述の「実数たちの有界集合はかならず上限を持つ」という類の命題は放棄(preisgeben)せざるを得ないが [1-6-g]、しかしこうした犠牲を払えばこそ、我々は[かつて]迷い込んだ誤れる道に[二度と]迷い込まないで済むのである⑮。

[訳者。この「放棄」については[2-4]も参照]。

[1-6-i]　　　　{関数(Funktion)とは何か —— 正当な階層概念を踏まえて}

まだ問題が残っている。[我々は狭い方の手続きを採用することにしたけれども] 、ではそのとき関数概念の方はどう設定したものだろうか。たとえば(etwa)、独立変数 t が対象カテゴリー $\mathfrak{t}$ (たとえば自然数) 上を動くような、そして [関数]値が実数となるような、そのような関数 x(t)を考えよう。そのとき或る二項関係(binäre Relatiom)があって、その空所 t はカテゴリー $\mathfrak{t}$ に、また空所 x は＜有理数たちの一次元集合＞[つまり実数]に関係づけられる筈だから、その二項関係を R(xt)とおく。[そうすると]この関係 R が成立するようにして、カテゴリー[$\mathfrak{t}$]の対象 t に対して、いや別の言い方をすると、これらの対象たちから成る一次元集合の各要素 t に対して、性質(Eigenschaft) a)b)c)を持つような[1-6-e]、有理数たちからなる一つそしてただ一つの集合 x[つまり実数 x]が、割り当てられることになる筈だから、この「実数」x をもって t の関数とみなす[というのが一つの考え方である]。これも[まあ]関数概念についての一つの考え方ではあるのだろう[その不適格性は

次の段落で明らかになるのだが]。　　　　　しかし次の解釈の方がもっと自然(natürlicher)に見えないだろうか。すなわち、実数 x を或る一つの共通の性質(eine gemeinsame Eigenschaft)で画定される<有理数たちの集合[つまり実数]>と解する点に変わりはないが、ただ、＜カテゴリー 𝔨 の任意の対象 t をこの性質に代入しても、x は[常に] t に従属的(abhängig)であり続ける＞というふうに関数を解釈する方が自然ではないだろうか。　　　　　それはこう言い換えてもよい。[まず] 二項関係 S(○○)、すなわち第一の空所が有理数のカテゴリーに、第二の空所が 𝔨 に関係づけられている二項関係 S(○○)から、その第二の空所が対象 t で充填されることによって件の性質が生じる(hervirgehen)なら、そのとき、x は t に従属的(abhängig)と言う。すなわちそのとき、性質 S(○t)に対応する有理数たちの集合 x は、t に従属的なりとされるが、これをもって「x は t の関数(Funktion)なり」とするのである。　　　　　なお言い添えれば(insbesondere)、帰属する集合 x が実数の性質 a),b),c)を所有すると言っても、それは、「カテゴリー 𝔨 のすべて(jeder)対象 t についても、それに帰属する集合 x が実数の性質 a),b),c)を所有する」を意味するとは限らないのであって、たとえば「このカテゴリーの対象たちの[或る]集合の、そのすべての要素 t に限って(nur)、それに帰属する集合 x が実数の性質 a),b),c)を所有する」という意味でもあり得る。

[訳者。＜𝔨＞はドイツ語のフラクトゥールの k（カー）の小文字]。

[1-6-j]　　　　　{最初の関数概念が不適格である理由}

[関数について] 最初の解釈を採用すると、「二つの関数の和はまた関数になる」という命題(Satz)すら成り立たない。たとえば二つの関数がそれに立脚する関係をそれぞれ R(xt), R’(xt)とし、また実数間の関係 x+y=z をΣ(xyz)と表記するなら、二つの関数の和は次の関係から生まれる。すなわち、　R(xt)・R’(yt)・Σ(xyz)＝RR’Σ(xyzt);　RR’Σ(※※zt). そうすると、和を構築するためには、基本カテゴリーに関係づけられていない空所[z]の充填が必要になるが、[その空所が基本カテゴリーに関係づけられていない以上]、それの充填には＜※（存在する）＞を利用せざるを得ない。ところが「狭い手続き」を遵守すると決断した我々にはそれができないのである。　　　　　これに対して二つ目の関数概念をとるとき、二つの関数の和が関数になることは明白である。　　　　　それに加えて、[二つ目の関数概念を擁護する材料がもう一つ見つかるのであって、実はそのことは前節[§5]で既に話題になっている(ferner zeigte sich im vorigen Paragraphen)。[実際、思い出して頂きたいのだが]、カントールは「連続体は加算でない」という命題を証明したのだった。 つまり彼は、「すべての自然数 n に対して自然数たちの集合 T を配属する(zuordnen)関数であって、しかも自然数たちの任意の(jede)集合 T がその関数値として登場する(auftreten)ような関数 T(n)は存在しない」という命題を証明したのだったが 、[よくよく見ると]この議論には、＜関数＞概念を二つ目の意味にとることが[暗黙の]前提とし

て含まれている。　　　　　　　[さらに]コーシーの収束原理(Cauchy'sche Konvergenzprinzip)もまた、[関数概念の]二つ目の解釈を支持するが（これについては第二章を参照[2-4-b])、このことが解析学を構築するに当たって決定的意義を有することは言うまでもない。

[1-6-k]　　　　　　　　　　{関数概念の確定}

これらの事情を勘案すれば、次に述べる関数概念に行き着くのは必然であり、その重要性は一目瞭然である。たとえば関係 R(uv｜xyz)を考えよう。ただその[五つの]空所では、空所 u,v が従属的(abhängig)、空所 x,y,z が独立的(unabhängig)とする。ちなみに 空所たちは二グループであり[それぞれ]順序づけられている。　　　　さて、[後者の三つの]独立的空所たちをそれぞれ、当該カテゴリーの任意の対象 x,y,z で充填すると、R は、(順序づけられた)「従属的」空所だけを残す関係 R(○○｜xyz)に転ずる。この関係 R(○○｜xyz)に対応する二次元集合をΦ(xyz)とすると[これは数学的過程による]、それが x,y,z に従属する(abhängen)二次元集合、つまり独立的変数x,y,zの「値(Werte)」たちの関数(Funktion)なのである。[これがまさに求める関数概念である]。　　　　（確かに或る関数値(Funktionswert)、すなわち[或る充填で]生まれる或る集合は、その充填に利用された対象たち —— つまり独立的変数の[或る一組の]値たち——に従属的ではあるけれども、この[一つ一つの]集合が帰属する(angehören)カテゴリーそれ自体(an sich)は、[独立的変数の値たちの如何に拘らず] 一定である(bestimmt)。すなわち、R において u と v が関与づけられていたのと同じ対象カテゴリーに、その空所たちも関与づけられるような二次元的集合たちのカテゴリー)。 我々の定義によれば、関係づけ(Beziehungen)

R(uv｜xyz)　　と　　(u,v:　Φ(xyz))

は同義(gleichbedeutend)なのである。

[訳者。文末の「我々の定義」とは、[1-6-b]での関係εの定義のことだろうか]。

[1-6-l]　　　　　　　　　{もっとも簡単な関数の例}

実例。R として関係づけε(xX)の否定 $\overline{\varepsilon}$(xX) を考える。[まず] 或る対象カテゴリーを考え、空所 x はこの対象カテゴリーに関与的としておく。[そこで] その対象カテゴリーに帰属する要素(Elemente)たちを一次元集合と見立てて、これら一次元集合たちのカテゴリーに空所 X は関与的とする。そこで x を従属側、X を独立側と見なすと、これ[$\overline{\varepsilon}$(xX)]から、各集合 X に対して X の補集合 $\overline{X}$ を値にとる関数Φ(X)が得られる。　　　　ちなみにこの関数は、独立「パラメーター(Argument)」と関数値とが同じカテゴリーに属す一変数関数のなかで、もっとも簡単な例を与える。

§7 代入原理と反復原理

[1-7-a]

すでに§5 で言及しておいた反復原理（Prinzip der Iteration）に最終的かつ全面的な定式化をもたらすものがあるとすれば、それは、先程来[§6]、我々が目を向けているあの＜自然な関数概念＞を措いては考えられない。任意の演算領域から出発するという、[§5 で一度は着手したものの＜§7 に譲る＞という形で中断した、あの]一般的考察に、この自然な関数概念を擁して再び挑戦することにしよう。[ただし関数の]反復原理を語るに前に、[集合の]<u>代入</u>原理(Prinzip der Substitution)に触れておく必要がある。

[1-7-b] {代入原理の具体的な適用例}

7. S(x w U) と R(u v | x y z) はいずれも関係(Relation)とする。なお（S の）空所 U は二次元集合たちのカテゴリーに関与的であり、しかしその二次元集合たちの空所たちは、[関係] R の空所 u,v に割り当てられている[のと同じ]カテゴリーに関与的とする。また R の空所 x と、同じく x と表記された S の空所 x は、どちらも同じ対象カテゴリーに関与的とする。 [さて] 関係 R の空所 u v が [x y z に対して] 従属的であるとすると、[まず] 関係 R から関数Φ(xyz)が生まれる。この関数[Φ(xyz)]の値(Wert)は、[前述の U に関する仮定により]、空所 U に帰属する⑯集合[たちの]カテゴリー(Mengenkategorie)に割り振られることになるが、これは（四つの空所 x y z w を持つ）関係 S(x,w，Φ(xyz))が構成されたことを意味する。

[1-7-c] {代入原理の一般的有効性}

前段落では[代入]原理を具体例に絞って定式化したのだが、それは分かりやすさを意図してのことである。だがこの原理が一般的に有効であることは明白だろう。ちなみに私は、R が独立的な空所を<u>いっさい持たない</u>ケースも、だから空所 U に代入されるのが、与えられた主題配列的な関係 R によって定義される特定の集合(Menge)[だけ]であるようなケースも、限界事例(Grenzfall)として容認する。その場合、§2 において原理 2 が、基本カテゴリーに関与する空所たちの充填に果たしたのと同じ役割を、代入原理は、集合たちからなるカテゴリー（Kategorien von Mengen）に関与する空所たち[の充填に]果たすことになる。ただしそこから、代入(Substitution)は<u>確定した</u>集合(bestimmte Menge)に適用できるという[この]拡張(Erweiterung)に加えて、代入は<u>関数</u>（Funktion）にも適用できるという拡張がさらに導かれる[項目 8 を見よ]。

[1-7-d] {反復の原理}

8. (<u>反復の原理</u>)。 次のような関係 R(x x’|X)を考える。この関係は二つの空所から成り、一つは従属的な群れ(Gruppe) x x’であり、他方は独立的な群れ X であり、しかも [それ

ぞれ] 順序づけられ(geordnet)ているとする。なお[後者つまり] 独立的な空所 X は二次元的な集合たちのカテゴリーに関与し、しかもその[カテゴリーに属す]各集合の空所は、それはそれで、R の従属的な空所 x x'が関与しているのと同じ対象カテゴリーに関与的とする。[さて関係] R から生まれる関数(Funktion)をΦ(X)と表記し、[さらに]この関数の値域が、(§6 の末尾の実例でそうしたように)パラメーターX の値域(Werte)が属すのと同じカテゴリーの集合であるようにする。[そのとき] 次のものが形成できることを保証するのが、代入原理である。すなわち、

$$R_2(x\ x'|X)= R(x\ x'|\Phi(X))。$$

（この場合、R_2から生まれる関数は反復関数 Φ(Φ(X)) である。）[ちなみに] 関係 R は R_1 とも表記できる。また R_2からは

$$R_3\ (x\ x'|X)= R_2(x\ x'|\Phi(X))$$

が作られる、云々。よってすべての自然数 n について、一般に、

$$R_{n+1}(x\ x'|X)= R_n(x\ x'|\Phi(X)) \qquad \text{ただし } R_1 \text{ は R に同じ。}$$

<u>R_1, R_2, R_3,….は</u>、<u>ただ一つの関係 R(n ; xx'|X)から生まれた関係たち</u>、<u>しかも「自然数」のカテゴリーに関係づけられたその空所 n を</u>、<u>1, 2, 3 で順番に(der Reihe nach)充填することによって生まれた関係たち</u>、<u>と解することができる</u>。

[1-7-e] {反復という出来事(Vorgang)はどこから来るか}

この[反復]原理が、自然数の役割(Bedeutung)に[初めて]実効性を付与する(Dieses Prinzip bringt die Bedeutung der natürlichen Zahlen zur Geltung)。なぜなら[自然数]列[それ自体]は或る出来事(Vorgang)のための一般的で抽象的な図式(Schema)に過ぎず、何らかの基礎的過程(eines elementaren Prozesses)が延々と繰り返し（Iteration）行われることで初めて、この出来事が[現実に]成り立つからである。 ただし原理の一般性を担保するためには、さらに三つの拡張(erweitern)が必要である。<u>第一に</u>、R のなかに、独立的な空所 X 以外にも、反復に関係しない別の空所がある可能性[を考えておく必要がある]。<u>第二に</u>、[一つの]X ではなくて、複数の空所が同時に反復を被る可能性[も考えておく必要性がある]。たとえば、

$$R(xx'|XY),\ S(y|XY)$$

という二つの関係があって、[それぞれ]空所は先ほど述べたような仕方で従属的と独立的とに分けられており、またそこから二つの関数Ξ(XY)およびH(XY)が生じ、しかも空所 X は、関数値Ξが割り当てられるのと同じ二次元集合のカテゴリーに、空所 Y は関数値H が割り当てられるのと同じ一次元集合のカテゴリーに関与するものとする。こうして、反復された諸関係の構築のための条件が揃ったことになる。すなわち、

$$R(1;\ x\ x' \mid XY)=R(x\ x' \mid XY);\quad R(n+1;\ xx' \mid XY)=R(n;x\ x' \mid \Xi(XY),\ H(XY))$$

$S(1;\ y \mid XY)=S(\ y \mid XY);\quad S(n+1;\ y \mid XY)=S(n;\ y \mid \Xi(XY), H(XY))$

最後に（第三に）、n 番目の手続きで代入される関数それ自体が n に依存するケースがあり得る。最後の空所が自然数のカテゴリーに関与的である関係を R(xx'｜X n)とし（他の空所については従前の仮定のままとする）、そこから生まれる関数をΦ（X n）としよう。[そのとき]関係 R※に至るまでの反復は次の式で書けるのである。

R※(xx'｜X1)=R(xx'｜X 1),

R※(xx'｜X, n+1)= R※(xx'｜Φ（X、n+1）, n)

[訳者。ΞとHはギリシア文字ξ（クシー）のη(エータ)の大文字]。

[1-7-f] {ベクトルの自然数倍}

反復原理のなかでもとくに複雑なのは、数学固有の(spezifisch mathematatische)反復原理である。それが使用された例として、§5 で話題にしたベクトルの自然数倍（Vektor-Vervielfaltigung）を考察してみよう。「ベクトル」というカテゴリーに関係づけられ空所をドイツ小文字で表し、二次元ベクトル集合たちのカテゴリーに関係づけられた空所をドイツ大文字で表す。X_0は関係σ(xyx)に対応する二次元ベクトル集合を意味する。そこで

$\varepsilon(\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{X})\cdot\sigma(\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{y}) \mid_{z=*} = R(\mathfrak{x}\ \mathfrak{y} \mid \mathfrak{X})$ と置くと、

反復によって R(n; $\mathfrak{x}\mathfrak{y} \mid \mathfrak{X}$)を得る。なお R(n; $\mathfrak{x}\mathfrak{y} \mid \mathfrak{X}_0$)は関係づけ y＝n $\mathfrak{x}$ である。

[1-7-g] {個数}

もう一つの例を挙げる。或る基本カテゴリーの要素たちからなる集合の「個数(Anzahl)」がこの集合の関数であることを示し、同時にこの関数を構成しようと思う。ラテン小文字は例の基本カテゴリーを、ラテン大文字はそのカテゴリーの対象たちの一次元集合を、ギリシア大文字はこれらの集合たちの集合を、それぞれ表す。Ωはこの最後の集合の＜全体集合＞」を表す（どの集合カテゴリーにも空集合と全体集合はある)。関数ε（yX)・$\bar{J}$ (xy) {つまり y は x と異なる X の要素である}において、 y は従属的とする。ここから関数 F(x X)が生まれる。{つまり x と異なる X のすべての要素の集合}。ε(U Ξ）の U にこれを代入すると ε(F(x X)、Ξ）・ε(x X)｜$_{x=*}$＝δ(X｜Ξ) を得る。{つまり、 X の要素で、x と異なる X のすべての要素は、それはそれで、Ξの要素であるような集合をなす}。この関係づけが反復されて δ(n; X｜Ξ) を得る。この場合、δ(n; X｜Ξ)＝α(n X) は「X は少なくとも n 個の要素からなる」(「X から要素を順次 n 回、取り除いていくことができる」を意味する。 自然数の一次元の集合というカテゴリーにおける空集合を、「個数 0」と名づける。全体集合は「個数∞」、n 以下の自然数の集合を「個数 n」と呼ぶ。(これが、n 個の要素の標準集合(Normalmenge)であり、他の集合は数えるという行為によってそれに帰着する)。関数α(n X) において、n を従属的、X を独立的と考えれば、そこから関数 $\mathfrak{N}$(X)=＜X の要

素の個数＞ が得られる。これは空集合に対してだけ 0 であり、すべての無限集合⑰について∞である。数は「基数(Kardinalzahl)」という仕方で数限定において一定の役割を果たすけれども、我々はその基数が、数に備わる、反復を抽象的かつ純粋に表現するという本源的な(Ursprünglich)機能に由来することを、厳密な仕方で確認することができたのである⑱。

[訳者。𝔑はフラクトゥールの N]。

[1-7-h]
論理学についての議論(§3)を踏まえれば、定義原理のリストが拡張されたのに伴って、当然、推論形式(Schlußformen)の拡張が引き起こされる。特に反復原理は、ベルヌーイの n から n+1 への推論すなわち「完全帰納法による推論」をもたらす。

§8　[解析学の]エレメンタの最終的定式化
—— 観念的要素の導入(Einführung idealer Elemente) ——

[1-8-a]　{<関係の同一性>と<集合の同一性>}
我々は古いイメージから新しいイメージに移り住むという課題に取り組んできたのだが、いかんせん、見晴らしのいい場所に立とうと思えば藪草との格闘は避けられない。私だってここまで最短距離を歩んできたと言えた柄ではないのだ。　しかし[こういうことがある]。我々はもう後生大事に、＜階を一つ上がるごとに(in einzelnen Stufe)、関係とそれに割り当てられる集合が[いちいち]産出される＞といった考え方にこだわる必要はない。[この場合、＜階段を上がるごとに、関係とそれに割り当てられる集合がいちいち産出される＞とは]、一階とは、その要素たちが基本カテゴリーに割り当てられるすべての集合たちをなすもので、二階とは、その空所が基本カテゴリーに関係づけられているか、あるいは一階の集合たちのカテゴリーに関係づけられるようなすべての集合たちであるようなものをいう、(以下同様)・・・みたいな考え方を言っている。しかしもうこんな考え方に執着する必要はないのだ。なぜなら代入原理と反復原理が導入されたからである。もちろん、たとえば先行する階への「先祖返り(Rückschläge)」は、代入原理に従うときでも起こりはする。でも(doch)、 [旧式の発想に従うときのように]循環に陥って無意味化しかねない定義からは護られているのであって、それは、[代入原理によって] [§2 の]存在原理 6 の適用が[実質的に]基本カテゴリーに抑え込まれたお陰である。直観的に分かりやすい(Anschaulichkeit)というのは大事なことだから、「関係とそれに割

り当てられる集合が発生的に(genetisch)産出される(erzeugt)」いう[直観的]イメージを捨てはしない。ただその場合、産出(Erzeuging)ということを、§4 で言及した[性質から集合へと進む]数学的過程の反復(Iteration)を、[あたかも]階段を移動するかのように(stufenweise)[つまり、いちいち先行する階すべてを踏まえて]起こるという意味にではなく、単に作用のたびにパラレルな仕方で(in lauter parallen Einzelnakten)起こるという意味にとろうではないか、と提案している[だけな]のである。その眼目は、上述の[一連の]定義原理を通じて、基本カテゴリーに関与的な[一連の]原的関係および ε [だけ]から、諸関係の総体(Gesammtheit)が導かれる点にある。　　　　　この場合、主題配列的な或る関係には、諸対象の国(Reich)から、[数学的過程という仕方で]或る「集合 (Menge)」が対応(entsprechen)づけられる訳だが⑲[[1-4-b],[1-4-f]]、その対応は[存在に立脚する対応ではなく] 何はともあれ(zunächst)純然たる形式上の(rein formal)対応である。[さて対応が純然たる形式的対応だとはこういう意味である]。関係と関係が同義的(sinngleich)なら両者は区別する(unterschieden)必要はないし、それぞれに割り振られた(korrespondieren)集合と集合も区別する必要はない。しかしそれ以外の場合(darüber hinaus)、つまり関係と関係が異義的（sinnverschieden）なとき、両者は同じ(gleich)か否か、またそれぞれに対応する集合と集合が同じか否かということについては、当面(vorerst)決定的なことは何ひとつ言えない。だから、関係を定義（Definition）するに当たっては、集合間の同等性(Gleichheit)という関係づけ(Beziehung)を使ってはならないのだ、と。[これが、対応が形式的対応であるということの意味である。しかしではどうすれば<関係の定義>に至ることができるのか]。　　　　　上述の仕方で構成された関係 R、しかも空所がすべて基本カテゴリーに関与的な関係 R を考える。すると、このカテゴリーの或る(irgendwelche)対象が関係 R を満たす[充填する]という申し立て(Behauptung)は有意であり、そして[有意である以上] それ自体、真または偽(wahr oder falsch)である。したがって、[ここで関係 R に加えて関係 R'を考えて]、「関係 R を満たすすべての要素組(Elementensystem)は関係 R'も満たし、逆も言えるか(ob)」ということ自体、真または偽ではあるだろう。そこで仮にそれが真なら、[これら二つの関係に]対応する[二つの]集合を同一視(identifizieren)しようではないか、と。　　　　　さてこのようなやり方で一階の集合たちの同定(identifizieren)が終了したその後に(nachdem)[初めて]（私は発生論的な口調を蒸し返している)、一部は基本カテゴリーに、一部は一階の集合たちのカテゴリーにその空所が関与的であるような、そんな関係たちに進むこともできるのだし、[また]このような二つの関係に対して、片方を満たすどんな要素対でも他方のそれを満足するかと、問いを有効に発することもできるのである。二階の集合たちの同定はこうして行われる、云々。　　　　　この場合、本質的なのは次のことである。関係を定義するに当たって、[充填と真偽の考察を端折って、いきなり] 集合に同等性(Gleichheit)や存在(Existenz)の概念を使用せぬこと。これを守ることで、そしてそれを守ってこそ、循環定義(Zirkeldefinition)というナンセンスは回避できる。

[1-8-b]　　　　　　　　　　　{原理の最終版}

§4 以降は暫定的な(provisorisch)内容なので全て破棄し(Aufhebung)、あらためて関係構成の諸原理の最終版をお示しする。

[1-8-c]

I. 出発点

1) 対象たちの（一つないしは複数の）カテゴリーたちと、対象たちにおいて直接に呈示される性質たちおよび関係たち、それらが[解析学の]基底(Grundlage、単数)をなしている。前者が「基本カテゴリー(Grundkategorien)」であり、後者が「原的関係」である。（なお関係の空所、たとえば判断図式の空所は、かならず或る特定の対象カテゴリーに関与づけられており、すべての空所が当該のカテゴリーの対象によって充填されているときに限って、判断図式は有意な命題をもたらす、とする）。原的関係の空所たちは、そのつど特定の基本カテゴリーに関与づけられている。私は[さらに]同一性J(xy)[の関係]を原的関係に含めるが、二つの空所 x と y は同一の基本カテゴリーに関与的でなければならない。（この[同一性の]場合、[空所の充填を]基本カテゴリーの範囲に留めることが決定的に重要である）。
2) 主題配列的な関係（空所が一つであれ複数であれ）には、対象界の側から(im Reich der Gegenstände)かならず一つの集合が対応する。たとえば、対象たち a,b,c がこの順序で主題配列的三項関係 R を充填するとき、a,b,c はそれに対応する集合 P の要素組(Elementensystem)を形成すると言う。この集合が割り当てられるカテゴリーは、たとえば R の第一、第二、第三の空所が関与的であるカテゴリーによって決まる。さらに我々は[当初の]関係に関係 ε を付け加えたが、それは基本的関与づけ(Grundbeziehung)の名目で付け加えたものである。すなわち関係 ε とは、a,b,c[という組]が集合 P の要素組をなすとき、[組]a,b,c と P の間に成り立つ関係を謂う。

[1-8-d]

II. 一般諸原理

[最終版の]一般原理 1 から 4 には、§2 の原理 1 から 4 までを当てる。なお 2.3.4.については、空所が＜重ねられる＞場合、空所たちは当然、同じ対象カテゴリーに関与的でなければならないとする。

[1-8-e]

III. 充填の原理

[最終版の]充填の原理には、§2 の原理 5, 6 を当てる。ただし「直接的に呈示された諸対象によって、または＜存在する(es gibt)＞によって充填される空所は、或る基本カテゴリ

ーに関与的でなければならない」という制限（Einschränkung)を設ける。

[1-8-f]

IV. 代入原理と反復原理

原理 7 には、§7 の原理 7 を当てる。なお、「絶対的」演算領域（§6 冒頭を参照）を含む演算領域から出発するなら（私はそうする積もりだが)、反復原理 S は追加事項を加味した一般形式の方を採るものとする。

[1-8-g]

V. 集合の同定(Identifizierung)、関数の同定

まず I の意味で基礎を形成する（性質たちと）関係たちを考え、さらに II,III,IV にまとめた諸原理の適用によってこれらの関係たちから得られるすべての関係を考える。言葉は簡単であるに越したことはないから、それを「定限的関係(finite Relation)」と呼ぼう。[さて]主題配列的な二つの[定限的]関係があるとし、しかも両方の空所は列順序を守りながら同じ対象カテゴリーに関与的とする。そのとき一方の関係を充たす要素組（Elementensystem）が他方の関係をも充填し、その逆も成り立つという命題が成立するなら、[関係に]対応する二つの（定限的）集合は互いに同一(identisch)である。[逆に]この命題が成立しないなら、二つの（「定限的」）集合は互いに異なる(verschieden)。

[1-8-h] {関数(Funktion)}

その空所たちが「従属的」と「独立的」の二つの順序づけられたグループに区分されている定限的関係[しかも前項 V の条件を満たす定限的関係]を R とすると、どの関係 R にも[それぞれ]一つの関数Φが対応する。従属的空所をその空所が帰属するカテゴリーの或る対象で充填すると、この充填によって R から生じる関係に対応する集合が決まるが、それが、充填に際して利用された「パラメーター組(Argmentsystem)」に対して関数Φがとる値(Wert)である。定義を異にする(verschieden definierte)二つの関数が互いに同一(identisch)とされるのは、パラメーター値の全ての組(System)について二つの関数が同じ値を取るときであり、またそのときに限る。

[1-8-i] {定限的な拡張演算領域}

これで「数学的に拡張された(mathematish erweitert)」演算領域を確定することができた。[それは次のような拡張である]。[第一に]、基本カテゴリーに加えて、集合たちおよび関数たちをその対象たちとするような、新たな観念的カテゴリー（neue ideale Kategorien）が付け加わり、その結果として、基本カテゴリーの対象たちに観念的カテゴ

リーの対象たちが新たに付け加わったこと。[第二に]、[それに呼応するようにして]、原的性質と原的関係に加えて関係づけ ε が付け加わったこと。そして[最後に]、(たとえば対象 a と b を二変数とする) 関数Φと、パラメーター組 a,b に対する関数Φの値の間の、その関係づけが[これも新たに]原的性質と原的関係に付け加わったこと、以上である。[また]この拡張された演算領域に[も]、特定の(bestimmt) 自体的に存在する(an sich existierende)対象たちからなる閉じた組(ein geschlossenes System)が、§1 と同じ意味合いで[また]含まれる。　　　　　[さて] この組を研究対象とし、またこの組についての完全な認識(vollkommene Erkenntnis)を望むなら、この組に関わるすべての配属完了判断(einschlägiges Urteil)の真偽の決定(entscheiden)が課題とならざるを得ない。ちなみに、「配属完了判断」の意味は§2 ですでに述べたところである。すなわち[ここでいう]配属完了判断とは、拡張された演算領域の上述の基本諸関係に、§2 の原理 I から VI を無制限に(uneingeschränkt)適用することによって生じる判断たちのこと、すなわち本来的意味での（つまり空所を含まない）判断たちのことである。ただし§2 でもそうしたように、[ここでも]基本関係たちに同一性も加えておこう（併せて、同一性の二つの空所は同じ対象カテゴリーに、しかも領域の拡張のおかげでいまや任意となった(beliebig)、[同じ]対象カテゴリーに関与的とする。)　　　　　[さらに] 原理 5 に関しては次のことにも留意されたい。集合と関数[という対象]の場合、「直接的に呈示される(unmittelbar aufgewiesen)」と言う言辞をどんな意味に採るべきかというと、それは集合と関数の本性(Natur)に立ち返ることによって決まる。具体的に言えば、集合と関数が[それぞれ]対応する諸関係を挙示する(angeben)ことによって、その「直接的呈示」はなされる。つまり集合と関数が[それぞれ]対応する関係たちを、[§8 の] II, III,IV に取りまとめた諸原理を使って、[§8 の] I で与えられたエレメンタから構成してみせること(konstruiren)、この手続きによって「直接的呈示」はなされるのである。　　　　　[ただし直接的呈示は注意を要するのであって]、たとえば、[確かに]二つの集合について一方は他方の部分集合であるか否かとか、実変数の或る関数は連続であるか否かとか、そうしたことなら問うこともできようが、「或る所与の集合のすべての部分集合の集合」⑳とか、「或る実変数を持つすべての連続関数たちの集合」などは、[そもそも]我々の演算領域には存在(existieren)しないからである。こうした集合は「定限的(finit)」ではなく[超限的(transfinit)」である。[実際]、§2 の諸原理を無制限(uneingeschränkt)に使用すると、事と次第によっては超限的判断や超限的判断図式が発生しかねないのであって、[先ほど]、定義を異にする二つの集合あるいは二つの関数の等しさ(Gleichheit)を語るに当たって基準(Kriterium) V の定式化を行ったとき、我々はこうした[超限的な]圏域(Gebiet)に[危うく]踏み込みそうになっていた(hinübergreifen)のだった。

[1-8-j]　　　　　{数学における公理とは}

私はこれで、解析を構築するに足る、簡明にして合理的で欠けるところのない、無矛盾な

基底(eine widerspruchsfreie Grundlage)を手に入れたと考える。それは、集合概念と関数概念の曖昧さゆえに、また存在や同等(Existenz und Gleichheit)の概念の（実数への）[不適切な]適用ゆえに悪循環(circulus vitiosus)に陥るほかなかった、あの従来型の基礎づけ（Begründung）とは一線を画すものである。　　　ここに示した派生的諸関係の形成のための諸原理は、集合と関数に関する公理(Axiome über Mengen und Funktionen)として読み替えることもできる。そして数学は、現状(in der Tat)、これらの公理からその論理的帰結（logische Konzequenzen）を導くという仕方で運用されている。

[1-8-k]　　　　　　　{数学における観念的要素}

議論を閉じるに当たって、数学への観念的要素の導入(Einführung idealer Elemente)に一言触れておく。　　　　実例として(als Beispiel)、代数的数体の理論におけるイデアール(das Ideal)を取り上げる。イデアールは、<有限個の代数的整数の組(System) 𝔰 は一つのイデアール (𝔰)を決める＞というふうに、定義される。[この場合]、命題Uつまり「代数的数αはイデアール (𝔰) で割り切れる(teilbar)」という命題の眼目は、「αと 𝔰 の間には或る関係 R(α, 𝔰)があるが、しかしそれがどんな関係なのかは当面それ以上突き詰めるに及ばない」という点にある。イデアールの意味は、上に引用した形式Uを持つ言明から読み取れる意味に尽きているのである。すなわちイデアールの意味は、それが[或る数を]割[り切]る数であるということに尽きている。　　　　そしてそうであればこそ(dementsprechend)、二つのイデアール (𝔰) と (𝔰’)が同一なのは、(𝔰) で割り切れる数は (𝔰’)でも割り切れ、逆に(𝔰’) で割り切れる数は(𝔰)でも割り切れるときに限るのである。それは、イデアール(𝔰)は、或る代数的数に備わる＜系 𝔰 に対して関係づけRを結ぶ＞という性質 R(o,𝔰)に対応している、ということに他ならない。　　　　ただしこの種の性質(Eigenschaft)が二つあるとき、これらの性質が同じイデアールに対応するのは、それ自体は異なるにせよ、これら二つの性質が実質的な意味で(materiell)等しい妥当外延(Geltungsumfang)を有するときであり、またそのときに限る。しかしこれはまさに、意識がそのすべての要素を展望しつつ「掻き集めたもの(Versammlung)」という集合の一般的イメージに公然と抗いつつ、私が集合(Menge、集まっているもの)の概念にとって唯一本質的なりとして提示した考え方に他ならない。そしてそのような意味合いにおいてこそ(demgemäß)、我々はイデアールを、デデキントもしたように、性質R(o. 𝔰)に対応する集合 M(𝔰)と見なすことができるのである。　　　　数学への観念的要素(ideale Elemente)の導入は、とくにいわゆる「抽象による定義」の手法に頼るケースも含めて㉑、いつもこれと同じ段取りでこなすことができる。このことは、集合概念と関数概念がこのようなすべての「新しい構築(Neubildung)」に完全に対応できることを示唆している。ただし、これも(ebenfalls)[本書後半の]実例で明らかになることだが、このことは、当然、事と次第によっては集合論的という言い方に収まりきらない、それと比べてはるかに含蓄に富む言葉の使用を[決して]排除するものではない。

[訳者。数学における観念的要素については、[1-4-b]に既出である。他に、[1-5-a]、[1-5-b]、[1-8-a]、[1-8-i]、[1-8-k]、[2-6-d]]。

[1-8-l] {まとめ}

{近代解析学の誕生と自然法則の概念}

関数の概念(Funktionsbegriff)には二重の歴史的起源(Wurzel)がある。第一に、物質界(materielle Welt)を支配する、しかも自然において看取される依存関係(naturgegebene Abhängigkeiten)があり、それが関数概念の発端となったということがある。この依存関係は二面性を持ち、一つは現実的事物(reale Dinge)の状態及び特性が、すぐれて独立変数の名に相応しい例のもの(unabhängige Veränderliche κατ εξοχήν)——つまり時間(Zeit) ——において可変的(veränderlich)であることを謂い、他の一つはその状態と特性が原因・結果の因果連関(kausale Zusammenhänge)に組み込まれていることを謂う。 だが関数概念にはこれと独立な第二の起源があって、算術的・代数的な演算(arithmatisch-algebraische Operationen)がそれに当たる。 旧式の解析学では、関数とは、独立諸変数から、四則演算と、初等の域を多少とも超えた若干の超越量（Transzendente）の有限回の適用によって得られる表現式(Ausdruck)を意味したが、これがまさに第二の起源に連なっている。ただし、これらの基本的演算は一度たりとも明晰かつ完全に表示されたことはない。制限が窮屈と感じられるたびに、歴史的発展がその狭すぎる制限を突破することがあるにはあったが、しかし発展の担い手たちがその都度そのことに自覚的だったかというと、必ずしもそうではなかったのである。——もともとまったく異質だった関数概念の二つの流れが交差した地点は、自然法則(Naturgesetz)の概念である。自然法則概念の本質は、自然において看取される依存関係を、純粋に概念-算術的に構成された関数(rein begrifflich-arithmetische Weise konstruierte Funktion)として描き出す(darstellen)点にある。ガリレイの落下法則がその最初の偉大な実例である。数学の近代的(modern)発展が生んだ見解はこうである。旧式の解析学は代数学に特化した構成原理を出発点としたが、それだけでは解析学を論理的かつ自然的に(logisch-natürlich)、すなわち普遍的に(allgemein)構築するには狭きに過ぎるし、物質的事象を支配する[普遍的]法則を認識するに当たって関数概念に求められる役割から見ても狭すぎるのではないか、という見解がそれである。普遍的論理的(logisch)構成原理が代数的(algebraisch)構成原理にとって変わるべきなのである。
[ところが]近代の解析学は、諸定義を与えるときのその言葉遣いから忖度するに、解析学の論理的構成を全面的に断念するお積もりでいらっしゃるらしい。(毎度のように、今回も彼らの言行が不一致に終わるなら、それはそれで目出度いことなのだが)。だがこの断

念は結局すべてを朦朧状態に追い込むことにならないか。そのとき自然法則という普遍的思想も雲散霧消することにならないか。

[1-8-m] {否定的な成果の意義}

必要な普遍的論理的構成原理は、一方では「かつ(und)、あるいは(oder) 、ない(nicht)、存在する(es gibt)」といった概念に依拠し、他方では集合、関数、自然数（反復）のような数学固有の概念に依拠する。我々がこうした概念を首尾よくすでに一つ残らず発見したと言えるかどうか、この点は措くとしよう。（いずれにせよ、これら諸概念の立て付けは規約(Konvention)の問題でなく、論理的認識の問題である）。だが一つ、非常に確実なことがある。私の議論の否定的な(negative)部分、[つまり]解析の従来のエレメンタに向けられた批判、[とくに]解析の循環性の指摘は正当なものであり、そこからの脱却を望むなら、私がここでとったような措置を採らざるを得ないのである。

[1-8-n] {フレーゲとラッセル}

私は、とりわけデデキントとカントールという名前と結びついた、今に至るも数学において絶対的影響力を行使するあの思考体系(Gedankenkomplex)に、歴史的経緯(Tradition)もあって囚われていた者の一人だが、私はこの軌道(Kreise)から脱する道を自力で(für mich)発見し、またその[脱出の]道をご覧のとおり踏破することもできたのである。[私と]方向性を同じくするフレーゲとラッセルのアイデアに私が触れたのは、その後でのことである。　　フレーゲは、画期的な小著、『算術のエレメンタ』(ブレスラウ、1884)のなかで、また浩瀚な『算術の基本法則』（イエナ、1893）のなかでも、次のことを――すなわち「集合」はあくまでも概念の外延(Umfang)の意味に解すべし、「帰属(Zuordnung)」はあくまでも関係の外延の（彼の言葉では関係の<値域(Wertverlauf)＞の）意味に解すべしと――明確に主張したのだった。　　またラッセルの論理的タイプ理論は㉒、我々が§6 で扱った、階層化(Stufenbildung)に対応するものである。実際、彼は「いかなる全体も、その全体自体で定義される成員を含むことは許されない(No totality can contain members defined in terms of itself)」という「悪循環原理(vicious-circle principle)」を定式化したのだった。ポアンカレの非述定的(nicht-prädikative)定義についての、もちろん[ポアンカレのことだから]相変わらず(allerdings)ひどく曖昧な(sehr unsicher)議論も、ここに含まれる㉓。　　もちろん(Freilich)、集合と帰属が対応するのはどんな性質と関係なのかという論点や、またその範囲を厳密な仕方で画定するには定義原理(Definitionsprinzip)を使用せざるを得ないという（私見では）決定的な観点は、彼らの議論のどこにも見当たらない。フレーゲから受け継いだラッセルの自然数の等価定義(Äquivalenzdefinition)と彼の「還元性公理」(Axiom of Reducibility)は、その価値を認めてもなお(trotz allem) 、埋めるに埋められない彼我の懸隔を物語っている。だから、ラッセルが「狭い手続き」や[私が]§6 の最後に導入した独自の関数概念を話題にしなかった

ことも、驚くには当たらないのである(verständlicherweise)。

[1-8-o]　　　　　{有限だけではなく、無限の基底にも、自然数がある}

デデキント・カントールの[集合]理論のエレメンタに対して、[それに欠けていた]厳密かつ完全な仕方で定式化を施したのは、ツェルメロの集合論の一連の公理である。そして私は初め、まさにこのツェルメロ式の公理[の研究]に手を染めたのであった㉔。彼の理論で決定的な役割を果たすのは「部分集合(Untermengen)」の公理 III [いわゆる選択公理]㉕であるが、この公理 III に登場する「確定的クラス言明(definite Klassenaussage)」の概念をより正確に(genauer)押さえてみよう、というのが私が[初めに]取り組んだ課題だったのである。 私にはツェルメロの定義(Erklärung)が、満足がいくだけの正確さに欠けているように見えたからである。そしてその取り組みの結果、私は[本書]§2 の一連の定義原理にたどり着いたのであった。　　　　[さてその経過をここで振り返れば]、私は、これらの原理を[他でもない]集合構成(Mengenbildung)のための一連の公理という体裁で定式化しよう、また一連の公理に含まれた構成原理を有限回適用して得られる以外の集合は存在しないという要請を、[公理のなかに]文言として書き込もう(Ausdruck)と企てたのだが、[たしかにこの方針自体は正しかったとはいえ]、ただこの課題を自然数概念を前提せずに(ohne den Begriff der natürlichen Zahlen vorauszusetzen)解こうとしたがために、私はいつ終わるともしれぬ、進めば進むほど錯綜する定式化に迷い込み、最終的な結果に到達することができなかったのである。　　　　[さてこの失敗を省みるにつけても]、私は規約主義(Konventionalismus)と縁を切ることによって、またそれと並行して[Fichte 流の] 普遍的で哲学的な認識(allgemeinen philosophischen Erkenntnisse)への関わりを深めることによって、初めて、それまで自分が追いかけていたのがスコラまがいのエセ問題(Scheinproblem)でしかなかったことを、思い知るに至ったのである。そのとき（他の点では私と哲学的立場を共にしないポアンカレに[この件では]同調して）こう固く確信したのである。すなわち反復のイメージ、自然数列のイメージこそが数学的思考(mathematische Dnken)の最終的な基底(Fundament)であるだろうと。　　　　それは、デデキントの「連鎖理論(Kettentheorie)」が、定義(Definition)と完全帰納法による推論(Schluß)を、上述の直観を利用することなく、[ただ]三段論法的に(sylligistisch)基礎づけ(begründen)ようと目論んだのと対照的である。集合論の一連の基本概念がこの「純粋(rein)」直観を遂行してこそ(nur)把握できるというのが正しいなら[私は正しいと思うが]、自然数の概念をまたぞろ[デデキントのように]集合論的に研究し直すのは余計なことであり誤解を招きかねない。(加えて私の立場からすれば、連鎖理論に悪循環の嫌疑を向けざるを得ないという事情もある)㉖。我々の一連の原理を使って一個の数学理論を打ち立てることができるというなら、必要なのは或る基底(ein Fundament)、すなわち基礎カテゴリー（Grundkategorie）と原関係(Urrelation)なのである。　　　　数学の大部分の(fast allen)定理では、本質的に無限なるもの(das seinem Wesen nach Unendliche)が

[無限回ではなく]有限回の決定(endliche Entscheidung)に委ねられるのであり、私はそこに数学の偉大さを見る。しかし[考えてみれば]数学的問題の「無限性(Unendlichkeit)」と称するものも、その基底(Grundlage)に自然数の無限列、およびそれに関与的な存在概念(Existenzbegriff)が控えておればこその無限性ではないだろうか。たとえば「フェルマーの大定理」はそれ自体、有意(sinvoll)、つまり真または偽ではある。しかしフェルマーの方程式の両辺にすべての[自然]数を順番に列をなすように代入するというやり方では、[代入がいつまでも終わらない以上] この設問に[真偽の]決定を下すことはできない。[フェルマーの大定理の証明という]この課題は[いま見たように]本質的に無限の課題であるにも拘らず、[もし]数学的証明(Beweis)をするというなら(durch den mathematischen Beweis)、この課題は有限の課題(endliche Aufgabe)として成し遂げられる(vollbringen)[はずの]ものなのである。(もちろん、我々がフェルマーの大定理の証明を現時点で(noch immer)手にしていない、ということはさておいて。)

[1-8-p] {連続体問題}

集合概念を本稿が推奨するような厳密な意味で受け止めるとき、「直線上の点にはそれぞれ、(出発点と単位長のとり方に応じて)、或る実数(すなわち§6 で見た性質 a),b),c)を充たす有理数の集合)が、その計数(Maßzahl)として対応し、またその逆も成り立つ」という申し立ては、重大な意味を帯びる。[なぜなら]この申し立ては、空間直観に与えられもの(das in der Raumanschauung Gegebene)と論理的-概念的な仕方で構成されたもの(das auf logisch-begrifflichem Wege Konstruirten)の間の、注目すべき結びつき(Verknüpfung)を確言しているからである。 しかしながらこの言明が、我々が何らかの仕方で直観(Anschauung)を通じて連続体について知ること、知り得ることの枠を完全にはみ出していることもまた、明らかである。この言明が語っているのは、直観に呈示されたものの形態的な記述(morphologische Beschreibung des in der Anschauung sich Darstellenden)といった代物ではない(ちなみに、直観に呈示されたものは、そもそも(vor allem)離散的な諸要素の集合で[さえ]なく、流動する何か(Ganze)でしかない。) この言明が語っているのはむしろ、直接的に与えられた、[しかし]本質的には非厳密な性格を持つ現実(inexacte Wirklichkeit)を、厳密な何か(exakte Wesen、複数)によって、下支えしてやること(substruieren)なのである。この手続きがあらゆる厳密な(物理学的な)現実認識の礎(fundamental)であり、またこの手続きを介してこそ、数学は自然科学に対して有意義(Bedeutung)な存在となり得るということ。この連続体問題については、第二章でさらに詳細に取り扱うことにしよう。

[訳者。言葉として substruieren は(英語なら)substructure に対応し、hyperstructure に対立する。]

[1-8-q] {数学は論理学ではない}

近年、数学を形式論理学から分離することに困難を感じる頻度がますます増えている(öfter)。[だが]我々の立場から明らかなように、互いにどれほど近しい関係にあろうとも、数学という学問はその明確に刻印された性格ゆえに、形式論理学とはその立ち位置を異にする(gegenübertreten)のである。

第二章

数概念と連続体（無限小計算のエレメンタ）

§1 自然数(natürliche Zahlen)と個数(Anzahlen)

[2-1-a]　　　　　　　　{加法と乗法}

自然数の圏域(Gebiet)に基本関係 F を持ち込むことによって、加法(Addition)および乗法(Multiplikation)という基本演算が得られる。詳細は以下のとおり㉗。

[2-1-b]　　　　　　　　{加法}

＜次の(nächstfolgend) 数に移る＞という操作を、m から初めて順次 n 回行うことで得られるのが、数 m+n である。丁寧に言えばこうである。$\mathfrak{X}$を自然数の任意の二重集合（つまり二次元集合）とする。さらに直接 p に先行する数 q と、[初めに挙げた] m とが、$\mathfrak{X}$の要素ペアをなすことを $\varepsilon^*(pm \mid \mathfrak{X})$と表す。すなわちこうである。

$$\varepsilon^*(pm \mid \mathfrak{X}) = \varepsilon(qm;\mathfrak{X}) \cdot F(qp) \mid_{q=*}$$

この関係が反復されると[一般に n について] $\varepsilon^*(pm \mid \mathfrak{X}\ n)$が成り立つ。また自然数領域における同一性 x=y に相当する二重集合を$\mathfrak{X}$についても設定することによって、まさに方程式 p=m+n で表される関係づけ $\sigma(pmn)$が生まれる。読者は、二つの数 m,n に対して、これらと関係 σ を取り結ぶ数 p が常にちょうど一つ割り当てられることを（完全機能法によって）証明されるがよい。　　　　すぐ次に来る数への移行を アクセント記号 ’ で表すと、加法の定義はまさに次のことを物語っている。すなわち、m＋１＝m’.　m＋n’＝（m+n）’　　　　[また] n に完全帰納法の推論を適用すると、結合法則 (l+m)+n=l+(m+n)　が得られる。これはすなわち、数列で、l [エル]から始めて最初 m 歩進み、さらに n 歩進むことによって、l から　(m+n)　歩で到達する数に至るということである。　　　　交換法則　m＋n＝n＋m の証明は二段階に分けなければならない。n=1 に対して成り立つことは m に帰納推論を適用することで示され、そこでさらに n に完全帰納法を適用することで、法則の一般的な確証が得られる。

[2-1-c]　　　　　　　　{大小関係}

m から始めて、或る数からその次の数へ移る操作を行って到達できる数は、m より大きいという(記号では >m)。三つの可能性、すなわち

(1) n>m｜n=m｜n<m

が完全な排他的選言(Disjunktion)をなすことは直観的に了解される。　　　最初のケースでは、m＋s＝n となるただ一つの数 s が存在するが、これも帰納法によって証明することができ、その証明には、或る数には一つだけ次の数があり、1 を除けば各数には直前

の数が一つだけ存在するという基本事実を使えば十分である。[すなわち、まず]「n>m は m＋n＝s となる数 s が存在することを意味する」という定義から出発する。そこでまず、m＋s≠m が一般に証明される（数列は自らに回帰しない、あるいは自身よりも大きい数は存在しない）。m=1 の時、1+s=s+1=s'≠1 であるから、この場合[m＋s≠m]は真である（なぜなら、s'には直前の数があるが、1 に直前の数はないから）。また主張[m＋s≠m]が m に対して真ならば、それは m'に対しても真である。なぜならかりに m'+s=m'なら、m'=s+m'=(s+m)' となり、m＝s＋m＝m＋s であろうから。　　　　さらに n が自然数なら、x ≧ n と n ＜ x のいずれでもないような数 x は存在しない。これは[まず] n=1 について妥当する。なぜならどんな数 x も x≧1 だからである。また n について妥当するなら n'にも妥当する。たとえば n＞x または n=x とすると、n'＞x である。しかし x＞n で x＝n＋s なら、s＝1 ゆえに x=n'か、あるいは s＞1 つまり s＝t＋ 1 であり、したがって x=n+s=n+(1+t)=n'+t＞n' だからである。　　　　加法の結合法則からは次のことが導ける。p＞n かつ n＞m なら p＞m である。そこからさらにこう言える。(1)のどの二つの可能性も両立し得ない。s＜s*から不等式 m+s＜m+s*が導かれる（減法の一意性）。

[2-1-d]　　　　　　　　{乗法}

乗法の意味は次の式(Formeln)に由来する。　　1・m = m,　　n'・m ＝ (n・m)+m, 関係 p=n・m は，σから出発し、我々の諸原理の助けを借りることによって、第一章の 7 節でベクトルの数倍に関して描き出したのとまったく同じ仕方で、構築される。n に帰納推論を適用することによって、分配法則が直ちに得られる。

$$(n_1+n)\cdot m = (n_1\cdot m) + (n\cdot m)$$

同じ手続きで結合法則が得られる。(n・p)・q＝n・(p・q)　　　　　交換法則の証明はやや複雑であって、それは以下に基礎を置く。すなわち　n・1=n.　n・(m+1)＝(n・m)+n.　　　いずれの事実も n に完全帰納法を適用することによって証明される。これらから次のことが知られる。n・x は x=1 のときは x・n と同じ値を取り、x と n の積は、x が x'に移るとき一様な仕方で変化する（つまり n だけ増える）。ゆえにあらゆる x に対して、両辺は一致する。―― s＜s*なら、s・n＜ s*・n である。

[2-1-e]　　　　　　{個数と切片}

次のような数集合（自然数の一次元集合）を[自然]数列の切片(Abschnitt)と呼ぶ。すなわち、m < n のとき、n がその要素なら m もかならずその要素であるような、そのような[自然]数集合を切片と呼ぶ。その意味で、自然数の圏域において空集合も全体集合も切片である。　　　　A が切片（ただし空集合でも全体集合でもない）なら、A が、≦ n であるすべての[自然]数の集合と一致するような、そのような[自然]数 n が存在する。証明はこうである。1 は A の要素である。（なぜなら、m が A の要素なら、m=1 か、m>1 かである。後者だとすると、1 は A の要素でないことになり、切片という前提に反する。）

A の要素 n ではあるが、その次の数 n'が [A の要素であるという] 性質を満たさないような、そのような[自然]数 n が存在する。[なぜなら]このような数が存在しないとすると、完全帰納法により、すべての[自然]数が A の要素になってしまう[からである]。[したがって]くだんの n は、「≦ n であるすべての[自然]数は A の要素だが、>n であるような[自然]数はそうでない」という求める性質を満たす。これで、切片の概念と§7 で導入された<u>個数</u>の概念が完全に一致することが確認された。今後、「個数 n」を$\bar{n}$ と表記する。

[2-1-f] {個数の大小}
切片 A が切片 B の部分集合で、しかも A と B が同一でないなら、A は B より小さい、B は A より大きいと言い、この場合も上と同じく記号<、>を使用する。異なる二つの切片があれば、かならず一方が大きくは他方が小さい。空集合 0 は他のどの切片よりも小さく、全体集合∞は他のどの切片よりも大きい。自然数 m で m < n なら、対応する個数について$\bar{m} < \bar{n}$ である。

[2-1-g] {数える(Zählen)とはどういうことか}
どんな演算圏域(Operationsgebiet)であれ、数を利用して、基本カテゴリーの対象たちの集合の個数限定を行うことが可能である。そのとき話題になっているカテゴリーの対象たちをギリシア小文字で、これらの対象たちの一次元集合をギリシア大文字で、そして自然数を従来どおりラテン小文字で表す。第一章の §7 で関係 σ(n Ξ) が定義されたが、[ここでは]それを「Ξは少なくとも(mindestens) n 個の要素からなる」と読む。

[2-1-h] {承前}
<u>Ξが少なくとも n' 個の要素からなると言えるなら</u>、<u>それは少なくとも n 個の要素からなると言える</u>。
[証明]。これは n=1 で真である。[次に] n についてそれが言えるとき、それは n'についても言える[と仮定する]。[さてそこで]<u>Ξ</u>が少なくとも n'+1 の要素からなるなら、Ξの要素ξがあって、ξに一致しないΞのすべての要素の集合は少なくとも n'個の要素からなる。しかし[最初の]前提により、Ξは少なくとも n'個の要素からなる。[ゆえに云々]。

[2-1-i] {承前}
<u>Ξが少なくとも m 個の要素からなるというのが成り立たないなら</u>、<u>Ξが少なくとも m +n 個の要素からなるというのも成り立たない</u>。
[証明]。前項ゆえに n=1 について正しい。一般の場合については、完全帰納法の推論を n に適用することによって示される。—— [さて]この命題は肯定的な表現ではこう書ける。

m < p として、Ξが少なくとも p 個の要素からなっているとき、それは少なくとも m 個の要素からなると。言い換えると、与えられたΞにおいて、関係σ(nΞ)が成り立つような自然数たちは一つの切片をなす。この切片がまさにΞの個数である。それが＝$\bar{n}$なら、関係σ(n Ξ)は成立するが、σ(n'Ξ)は成立しない。

[2-1-j] {承前}
次の命題が完全帰納法で証明される。ΞがHの部分集合であり、Ξが少なくとも n 個の要素からなるのなら、Hもやはり少なくとも n 個の要素からなる。そこから言えるのは、部分の個数は全体の個数より小さいか、等しいか、[そのいずれかである]ということである。無限な部分集合を持つ集合は、それ自体、無限[集合]である。

[2-1-k] {承前}
定義(Definition)から次のことが帰結する。少なくとも n 個の要素からなる集合Ξに、新しい一つの要素を追加すると、n'個の要素からなる拡大集合が生まれる。とくに、Ξがちょうど n 個の要素からなる場合、つまりΞの個数がちょうど n の場合には、それが成り立つ。しかしその逆は決して自明ではない。

[2-1-l] {承前}
逆(Umkehrung)。少なくとも n'個の要素からなる集合 Ξ' から任意の(beliebig)要素ξを取り除いたとき、少なくとも n 個の要素からなる集合Ξが残る。

[2-1-m] {承前}
定義に含まれているのは、＜承前＞「Ξ'からξ_0 を除去することによって生まれるΞ_0 が、少なくとも n 個の要素からなるような、そのような要素ξ_0 が存在する(es gibt)」、ということだけである。それにもかかわらず、あの逆は一般に正しいのであり、そのことを要素の交換(Austausch von Elementen)に関する命題を使って証明する。少なくとも n 個の要素からなる集合Ξで、その要素の一つを、（いま話題にしている）カテゴリーの一つの新しい対象で（他の要素に手を触れることなく）置き換えるなら、やはり少なくとも n 個の要素からなる変形された集合Ξ* が生まれる。[まず]この命題は n=1 で妥当する。[さらに]自然数 n についてそれが妥当するとしよう。Hは少なくとも n' 個の要素からなる集合とする。Hの或る要素ηで、そのη以外のHのすべての要素の集合Ξが少なくとも n 個の要素からなるような、そのような要素ηが存在する。そこでHにおいて或る要素η_0を、他のどの要素とも異なる対象η_0^* で置き換えると、HはH* に転じるが、ここで二つのケースが考えられる。すなわちη_0＝ηか、それとも ≠ηか。前者なら、H*はΞに、新しい要素η_0^*をつけ加えたものとなり、ゆえにH*は少なくとも n'個の要素からなることになる。後者なら、Ξの要素η_0をη_0^*で置き換えることによって、Ξは新しい集合Ξ*

に変わる。[ところが帰納法の]前提から、Ξ*は少なくとも n 個の要素からなる。H*はΞ*のすべての要素以外に、Ξ*に登場しないηを含む。ゆえに、この場合もまた、H*は少なくとも n'個の要素からなる。

[2-1-n] {承前}
ここから「逆」の正しいことが直ちに導かれる。なぜならξ_0とξを置き換えると、Ξ_0からΞが生まれるからである。したがってΞもΞ*同様、少なくとも n 個の要素からなる。——さらにこう言える。ちょうど n 個の要素からなる集合に、さらに一つの要素を付け加えると、ちょうど n'個の要素からなる集合が生まれる。n'個の要素からなる集合Ξ*から一つの要素を奪うと、ちょうど n 個の要素からなる集合Ξが残る。(無限集合から一つの要素を奪うと、無限集合が残る。) Ξ からどの要素が奪われるかに関係なく、上の命題は成り立つのであって、周知の数え方(Zahlverfahren)というもの、すなわち「数え方においては、数の並び方と独立に同じ結果を得る」という事実はこのことに立脚している。 この場合、同時に次のことも証明されている。n 個の要素からなる集合において、或る要素を他のどの要素とも異なる対象で置き換えても、この新しい集合もまた n 個の要素からなるのであって、このことを「集合の個数はその要素の性格(Natur)から独立である」などと言う。ここで完全帰納法によって(言明は n=1 の場合については既に保証されている)、次の結果を得る。すなわち、ちょうど m 個の要素からなる集合に、この集合のどれとも異なる n 個の要素からなる集合を併合すると、$=\overline{m+n}$個の要素からなる集合が生まれる。

{訳者。$\overline{m+n}$ は m+n の誤記か}。

[2-1-o]. {承前}
基本カテゴリー[2-1-g]として自然数のカテゴリー自体を設定すると、<u>自然数の集合</u>それ自体を数える(zählen)ことができる。この場合、「自然数列の切片$\overline{n}$はちょうど n 個の要素からなる」という命題が妥当する(既に得られた成果に立って、帰納法により証明できる)。個数概念をこのように理解することによってさらに次の確認に至る。すなわち、たとえば n と互いに素な n より小さい自然数の個数ϕ(n)は例の厳密な意味で n の<u>関数</u>であるということ。このことはこれ以外のあらゆる「数論的関数(zahlentheoretischen Funktionen)にも言える。——

[2-1-p] {二つの公理}
数についての一連の基本的真理は、上述のやり方と上述の手順で、完全帰納法の推論を途切れなく援用することによって、二つの「公理」から論理的に(logisch)導くことができる。二つの公理とはこうである。どの[自然]数にも、それに後続するただ一つの[自然]数が

存在する。そして 1 以外のどの[自然]数にも、それに直接先行するただ一つの[自然]数が存在する。

§2　分数(Brüche)と有理数(rationale Zahlen)

[2-2-a]　{分数はベクトルたちの或る二重集合である}

日常生活でもそうだし、およそ分数が足し算可能な量の計測に使われる場面でそうなのだが、分数は[まずもって]乗数(Multiplikatoren)として姿を現す。たとえば、直線上のベクトルを考えると、一つのベクトルのそれ自身への加算の繰り返し（第一章 1，§7 参照）によって、[ベクトルの]自然数倍(Vervielfältigung)が[まず]得られる。つまり自然数 m に対して、m$\vec{a}$ すなわちベクトル $\vec{a}$ の m 倍が、これもまた或るベクトルとして与えられる。[さて]この演算にはその一義的な(eindeutig)逆転(Umkehrung)つまり分割（Teilung）が対応する。[つまり] $\vec{a}$ がベクトルで n が自然数ならば、[今度は]nx=$\vec{a}$となるような、一つそしてただ一つのベクトル x=$\vec{a}$/n が存在するのである。[ここでさらに] 自然数倍と分割を組み合わせると、$\vec{a}$の「m/n 倍」つまり m$\vec{a}$/n が得られる。　分数記号 m/n は何のためにあるかと言えば、二つの分数があるとき、任意のベクトルにこれら二つの分数が表す操作を施したときかならずその結果が等しいのなら、これら二つの分数は等しい(gleich)、ということを言うために分数記号 m/n はある。　[ところで]任意のベクトル $\vec{x}$ からベクトル

(2) $\vec{y}$=m$\vec{x}$/n

を生成する「演算」に比べると、この（2）の方程式、つまり

(3) n$\vec{y}$=m$\vec{x}$

によって表現される、$\vec{x}$と$\vec{y}$の主題配列的な「関係(Relation)」の方が扱いやすい。[そこで]二つの分数が同じ(dieselbe)とは、これら二つの分数に同じ妥当外延(gleiches Geltungsumfang)を持つ関係(Relationen)が割り振られている(gehören)ことだ、と読み替えようというのである。そのとき分数 m/n とは、関係(3)に対応する、ベクトルたちの二重集合(Doppelmenge)に他ならない。　――― 分数の乗法(Multipllikation)とは、[ベクトルの自然数倍と分割の組み合わせとして]認められたベクトル演算が順次実行されることを意味する。乗法の諸法則は、自然数倍と分割が互いに交換可能(vertauschbar)であるという基礎的事実に由来する。　分数たちの加算が可能なのは、($\vec{a}$への適用の例を考えると)、m$\vec{a}$/n+m*$\vec{a}$/n*. で表現される操作が、m/n+m*/n*という和で表記されるただ一つの分数で表現できるという事実に由来する。ご覧の通り、我々は分数の加法と乗法を飽くまでも具体的な適用(konkrete Anwendund)

の側から捉えているのである。

[訳者。原文はベクトルを（たとえばａなら）ａのゴシック体で表示するが、通常のａやαなどと非常に紛らわしいので、 $\vec{a}$ で表すことにした]。

[2-2-b] {分数は算術的に定義される}

量の圏域が変わるたびにそれ専属の分数を準備するのは難儀である。分数の規則は[個々の]量圏域の特性とは独立なのだから、むしろ、純粋に算術的に分数を定義することが目的にかなっている。―― しかもあらゆる量圏域に通用するように、そして無限にあり得る個別事例に対処できるように、そのように自然数倍と分割の過程(Prozeß)の組み合わせが記号化(symbolisieren)できるなら、それに越したことはない。そういう点を考えても、純粋に算術的に定義してやることが分数の目的にかなっている。 分数の算術的定義は次のようにすれば容易に実現する。すなわち、[そもそも]自然数はそれ自身加算可能な量圏域を形成している訳だが、[今度は]その自然数たちの組(das System der natürlichen Zahlen)に焦点を絞って(insbesondere)、上記の一連の考察[2-2-a?]を適用すればよい。なおこの圏域において関係づけ(3)は y について必ずしも解けるわけではないけれども、それは理論展開にとって致命的ではない。とりあえず以下の構成が実行できる。

[2-2-c] {分数の算術的定義}

自然数の関係 a・b=c を π(a,b,c,)と表す。さらに関係 $\pi(m,x,z)\cdot\pi(n,y,z)|_{z=*}$ を作る。すなわち、関係 mx=ny を作る。ここで m と n に二つの特定の自然数を置くと、そこで得られる x、y の二項関係には自然数の二重集合が対応するから、それを分数 m/n と名づける。同時に m/n は、二つの独立変数 m と n を持つ、或る関数（分数関数）の記号にもなっている。 今後、分数をギリシア小文字アルファベットの最初の方の文字で表す。x,y が分数（二重集合）αの要素ペア(Elementarpaar)をなすときに、「y は x に対して比αにある」と言う。α=m/n なら、特に、m は n に対して比αにある。自然数の積算法則から次のことを証明してみられよ。二つの分数 m/n と m*/n*は mn*=m*n が成り立つとき、そしてそのときに限って互いに等しい。

[2-2-d] {承前}

関係α・β=γ はこう述べている。x が y に対して比αにあり、y が z に対して比βにあるとき、かならず x は z に対して比γにあると。任意の二つの分数αとβに対して、それらの間にこの関係式が成り立つようなγが、一つそしてただ一つ存在することを証明して見られよ。それをαとβの積(Produkt)と呼び、α・βで表す。（つまり α＝m/n、β=m*/n*ならα・β＝m・m*/m・n*)

[2-2-e]　　　　　　　　　　{承前}

関係$\alpha+\beta=\gamma$はこう述べている。x が z に対して比αにあり、y が z に対して比βにあるとき、x+y は z に対して比γにある。これに対応する命題（および次の計算規則　$\alpha+\beta$ $=\{(m\cdot n^*)+(m^*\cdot n)\}/n\cdot n^*$　）を証明してみられよ。これらの諸定義から容易に、加法と乗法の基本的計算規則が得られる。

[2-2-f]　　　　　　　　　　{承前}

ベクトルの場合と同様に、この加算に基づいて分数の自然数倍と分割が説明できる。分数の領域(Bereich)では、分割は常に実行可能、かつ一意的に実行可能な演算であることが確認される。次を確認されよ。　$(m\beta)/n$ と（$(m/n)\cdot\beta$が一致すること。

[2-2-g]　　　　　　　　　　{承前}

もしα,βがどちらも分数であり、しかも$\beta+\gamma=\alpha$となる一つの分数γが存在するなら（すなわち$\beta+m/n=\alpha$となる二つの自然数 m,n が存在するなら）、αはβより<u>大きい</u>といい、記号$\alpha>\beta$で表す。またβはαより<u>小さい</u>ともいい、$\beta<\alpha$と表す。この場合、このようなγはただ一つだけ存在する。しかもこの場合、以下の可能な場合たちは完全な選言関係をなす。　$\alpha>\beta$　｜　$\alpha=\beta$　｜　$\alpha<\beta$。

[2-2-h]　　　　　　　　　　{承前}

自然数 m たちと、それに相応する(korrespondierend)　分母 1 を持つ分数 m/1 たちの間には、完全な同型性(Isomorphie)が成り立つ。[つまり]自然数たちの間に成り立つ和、積、大小関係が、これに対応する分母 1 の分数たちの間の個々の関係に正確に反映される。しかし両者を同一視(identifizieren)してはならない、同一(identisch)でないものを、同一に「見せかけ(machen)」てはならない。ただ、数が計測(Messen)に使われる場合には、自然数 m と分数 m/1 が同じ「m 倍」という過程を表すことだけは記憶に留めておこう。

[2-2-i]　　　　　　　　　　{言葉の混乱}

さてここから先の議論を、第一章の§6　で話題にした[例の]やり方でやれない訳ではない(könnten)。つまり、[自然数から]分数の階まで登ったところで、そこまで登ってきた階段をいわば取り壊し、しかも　、たったいま到達したちょうどその高みに、更なる建て増しのための基石をまた新たに（von neuem）置き直すというやり方、このやり方をここで採用できない訳ではない。[具体的に言えば、自然数ではなく]、自然数<u>プラス分数</u>を、一から(von vornherein) またぞろ基礎カテゴリーとして立てよう、そしてそこから出発しようというのがそのやり方である。[だが]当然この場合、「自然数からなる 2 次元集合たちからなるカテゴリー」は[いま述べた]二つ目の基礎カテゴリー(die zweite Grungkategorie)[の自然数の部分]をうちに含むことになるだろう。[だが、自然数からな

る 2 次元集合たちからなる]派生的カテゴリーが、[自然数という]基礎カテゴリーに[部分的に]被る（Überdecken）というこの状況を解消する手立ては、[どこにも]見つからない（相違しないものに向かって相違していると言い張ること[つまり被っているものに向かって被っていないと言い張ること]はできない)。とはいえ、この[被るという]状況は<u>無視</u>(ignorieren)できる程度のものである。[なぜなら]配属完了的な問い[の真偽]を決定するに当たっては、断じて、或るカテゴリーに属す対象と別のカテゴリーに属す対象が同一か異なるかの確認など必要ないからである。これはまあ、[せいぜい]言葉の混乱(ein verwickeltes Doppelspiel)が起きているという程度の話であって、それは、「自然数」というただ一つの基礎カテゴリーから出発した構築を切れ目なく遂行する過程で、[自然数という同じ言葉が異なる]二重の意味で[たまたま]使用されたという、言葉をめぐる部分的混乱であるに過ぎない。　　　　　しかし[そうは言っても]言葉のこの二重使用にも、表現の簡便性などの点でそれなりの効用はある。そこで[次に挙げる]こんな手を使えば、純粋自然数論の基底を損なうことなしに、この効用をうまく生かすことができると思う。

[2-2-j]　　　　　　　　{約束事}

[こう考えよう]。「これこれ性質を持つ分数が<u>存在する</u>(es gibt)」という言い回しが出てくるたびに、この表現は次のような意味を持ち、しかもそれ以上の意味は持たないと解する。すなわちこの言い回しを、二つの自然数 m,n [それが 1 であろうがなかろうが]が存在すること、しかも分数α＝m/n が上述の性質[これこれの性質]を持つような、そのような自然数 m,n が存在するという意味に解するのである。　　　　[ちなみに]自然数の二重集合㉘(Doppelmenge) M とはこういうことである。すなわち、m,n がその要素ペア(Elemetenpaar)の一つであって、分数 m*/n*=m/n なら、m*,n* もかならず M の要素ペアである、と。このとき、M は<u>分数の領域</u>(Bereich von Brüchen)であると言う。m,n が M の要素ペアをなすとき、分数α＝m/n は<u>この領域 M に属す</u>(angehören)と表現することにする。（αに、しかもαのみに対応する分数の領域は、αと同一である。）[なお、2-2-i のように] 集合 M が「自然数」に関係づけられた二つの空所の他に、なんらかのカテゴリーに関係づけられた空所たちをさらに含んでいる場合にも、同様の呼び方をすることにする。　　　[ところで自然数ではなく]分数の「二重領域(Doppelbereich)」が何を意味するかはおわかりだろう。これは自然数の四重集合であって、しかも、m,n;p,q がこれの要素組(Elementensystem)をなし、m*/n*=m/n,　かつ p*/q*=p/q なら　m*,n,*p*,q*もその要素組をなすような、そのような自然数の四重集合である。こうした条件のもとで、α＝m/n とβ＝p/q は、(この順番で) この二重領域に属す分数のペア(Bruchpaar)をなす。

[訳者。この最後の議論は [2-3] で話題にする「実数」につながる]。

[2-2-k]　　　　　　　　{　<分数の国>から<有理数の国>へ }

直線上のベクトルでもそうだったが、もし或る量圏域(Größengebiet)において、法則 $\vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a}$ を充たす個別の量(die singulaire Größe) $\vec{0}$が存在し、またどの量$\vec{a}$についても$\vec{a}$+（$-\vec{a}$）＝$\vec{o}$となるような$\vec{a}$と逆の(entgegengesetzt) 量 $-\vec{a}$ が存在するのなら、そのとき、この量圏域(Größengebiet)には、定数倍と分割の過程(Prozeß)に加えて、折り返し(Umklappung)の演算、すなわち$\vec{a}$を $-\vec{a}$ に置き換える演算、ならびにどんな量でも$\vec{o}$に帰すようなゼロ過程（Nullprozeß）が参入したことになる。　　　　　これら[折り返しとゼロ化という二つ]の過程も込みで、またこれらの過程に自然数倍と分割を組み合わせたものまで[敢えて]「数(Zahlen)」と呼ぼうというのなら、分数の国(das Reich der Brüche)にゼロと負数を加えることによって、それを有理数(das Reich der rationalen Zahlen)の国に拡張しておく必要がある㉙。乗法を加法に読み替えるという手間はかかるものの、自然数から分数を得たときと同じ要領で、以下のようにして純粋に算術的に分数から有理数を得ることができる。

[2-2-l]　　　　　　　　　　{承前}

αとβを二つの分数とする。そのとき、自然数 x,y; u,v の間の関係　α＋u/v=β+x/y に相応する 4 次元集合は、分数たちの二重領域(Doppelbereich)になっている。この二重領域を有理数$\alpha-\beta$と呼ぶ [訳者。原著はこの引き算を古風に$\alpha\div\beta$と表記するが、従わない]。[もちろん] 分数ペア(Bruchpaar) ξ,ηがこれに属すのは$\alpha+\eta=\beta+\xi$となるときであり、またそのときに限る。（この場合、ξとηは有理数$\alpha-\beta$だけ異なるという。）以後、有理数はλ,μ,ν,・・などで表す。$\alpha-\beta=\alpha'-\beta'$ となるのは$\alpha+\beta'=\alpha'+\beta$のときであり、そのときに限るということは容易に証明できる。

[2-2-m]　　　　　　　　　　{承前}

とくに x/y=u/v によって定義された、自然数の 4 次元集合は一つの有理数であり[$\alpha=\beta$のときの$\alpha-\beta$]、これには 0 という文字名を与える(個数 0 と混同する恐れはない)。すなわち$\alpha-\alpha=0$である。　　　　　αが分数なら、$\alpha+\eta=\xi$のとき、かつその時に限り、分数対$\xi\eta$がそれに属すような分数の二重領域は一つの有理数であり、これを$+\alpha$と呼ぶ。　　　　同様に$\alpha+\xi=\eta$によって定義された分数の二重領域は一つの有理数であり、これを$-\alpha$と表わす。　　　　　分数間の「大小」関係から、0 と異なるどの有理数にも、ただ一つの分数αが配属される(この有理数の絶対値(absoluter Betrag))。ただこの有理数は ＝$+\alpha$だったり＝$-\alpha$だったりするのであって、それに応じて正の有理数と負の有理数が区別される。

[2-2-n]　　　　　　　　　　{承前}

有理数の方程式$\lambda+\mu=\nu$とは、分数ξと分数ηが[分数]λだけ異なり、分数ηと分数ζ

が[分数]μだけ異なるなら、かならず、分数ξと分数ζは[分数]νだけ異なるという意味である。任意の二つの有理数λとμに対して、かならず、上記の関係を満たす[有理数]νが一つそしてただ一つ存在する。この加法は結合法則と交換法則を許容し、一意的な逆演算すなわち減法を許容する。ちなみに$\lambda+0=\lambda$である。

[2-2-o] {承前}

以上の定義のもとで、有理数[の全体]は、自然数倍、分割、および「折り返し」の諸演算がかならず一意に遂行可能であるような、足し算可能な量の圏域(Gebiet)を形成する。m を自然数、$\alpha=m/n$ を分数、μを有理数とすると、記号の組み合わせ

(4) $m\mu$ と $m\mu/n=\alpha\mu$

の意味が知られる。すなわち、二重領域 $m\mu$ あるいは$\alpha\mu$のすべての分数対が、そしてそれだけが、μに属す全ての分数対$\xi\eta$から、それぞれ

$m\xi, m\eta$ あるいは$\alpha\cdot\xi$、$\alpha\cdot\eta$

を作ることによって得られる、と。λ, μ, νが有理数のとき、$\lambda\cdot\mu=\nu$は、$\lambda=0$、$\nu=0$であるか、<u>または</u>分数αで、$\lambda=+\alpha$、$\nu=\alpha\mu$となるものが存在するか、<u>または</u>分数αで$\lambda=-\alpha$、$\nu=-(\alpha\mu)$ なるものが存在するか、のいずれかである。これで、有理数の乗法が加法に基づいて定義できた。自然数倍、分割、および「折り返し」という三つの初等演算の交換可能性から[一連の]計算規則が得られる。有理数の国では、0 による割り算を例外として、4 種類の演算が一意に遂行可能である。

[2-2-p] {承前}

$\lambda-\mu$が正のとき、λはμより大きい(größer)と言う。

[2-2-q] {有理数が存在するとは}

「これこれの特性(Beschaffenheit)を持つ有理数が<u>存在する</u>(es gibt)」という表現は、かならず、有理数 $m/n - p/q$ がその性質(Eigenschaft)を持つような、そんな四つの自然数 m,n;p,q が存在することを意味する。分数について採用した言葉遣いを生かし、有理数の領域(Bereich)を次のような性質を持つ分数の二重領域(Doppelbereich)と呼ぶ。すなわち分数ペアα, βがこの二重領域に属しかつ$\alpha-\beta=\alpha'-\beta'$であるときはいつでも、分数ペア$\alpha', \beta'$もその二重領域に属す、という性質を持つ二重領域と。それゆえ有理数の[全体]領域は自然数の 4 次元集合である。

§3. 実数

[2-3-a]　　　　　　　　　　　　{実数へ}

分数(Brüche)とは、自然数をパラメーターに持つ m/n という特定の関数の[関数]値の集合であり、また有理数(rationale Zahlen)とは、自然数をパラメーターに持つ　m/n − p/q　という特定の関数の[関数]値の集合であった。[そこで次に、実数とはいったいどんな集合なのかという問いと取り組む段になるが]、論理的曖昧さを残さず実数概念を把握したいなら、[この問いに取り組むに先立って]、特定のカテゴリーの[対象たちについて]その「すべての可能な集合たち(alle mögliche Mengen)」[という言い回し]が[そもそも]何を意味するのか、を吟味しておく必要がある。　　　[ただしこういう事情がある]。先に提示した一連の定義原理(Definitionsprinzipien)は、すでにこの[カテゴリーの対象たちのすべての可能な集合たちとは何かという]問いに答えているのであって、[ただ]実数の問題に取り組むこの段に至って初めて(erst)、基底への立ち帰りの（Eingehen auf das Fundament)、すなわち論理的な判断結合の諸原理への立ち帰り[の必要性が]顕在化したというのが実態なのである。実数の解析をその論理的な根っこ(Wurzeln)まで掘り下げたとき、実数の解析と有理数の算術の差が表面化するということである。　　そこで私はまず、今まで築いてきたあの基盤(Basis)の上に、実数と関数の理論の第一のエレメンタ(erste Elemente)を展開し、その上でこの理論が[一方では]量の理論(Größenlehre)に、[他方では]連続体の直観(Anschauung des Kontinuums)に繋がる、その間の経緯を精査しようと思う。

[2-3-b]　　　　　　　　　　{純粋数論の枠内で}

そういうわけで(also)、構築済みの[あの]純粋数論の内部でとりあえず作業を進めることにする(Fahren wir also zunächst fort in unserm Aufbau der reinen Zahlenlehr)。有理数の領域(Bereich)、しかも、或る有理数λがそこに帰属するなら <λである有理数もかならずそこに帰属するような、そのような[有理数の]領域を（自然数の圏域の場合に倣って)、切片(Abschnitt)と呼ぶ。　　　　[有理数の]この切片に帰属する有理数たちのなかに、最大と呼べるような有理数が存在しないなら、切片は開いている（offen)と言い、 [有理数の] この一つ一つの開切片を[一つ一つ]実数(reelle Zahl)と名づける（ただし空領域と全領域は除く）。したがって[一つの]実数とは、自然数の特定の四次元集合 (besondere vierdimensionale Menge natürlicher Zahlen)のことである。　　さてこれらの集合たち[実数たち]からなるカテゴリーを､「カテゴリーRZ」と[大文字で]表記し、このカテゴリーに帰属する各対象[すなわち各集合＝各実数]は、[集合ではあるけれども]ドイツ小文字で表記する。　　　　[ここで本節冒頭の「可能なすべての集合」をめぐる問いに戻ると]、実数であること(reelle Zahl zu sein)はカテゴリーRZ の対象$\mathfrak{x}$の定限的(finit)性質だから、[その意味で]我々の演算領域には「すべての実数たちの集合」が存在 (existieren)すると言って差し支えない。

[2-3-c] {実数値関数と実数列}

$\mathfrak{f}(t)$を関数（ただし第一章で確定した意味での関数）とする。そのパラメーターtは任意の対象カテゴリー K 上を走り、その[ときの関数]値は常にカテゴリーRZ に属すとする。さらに、カテゴリー K の対象たちの一次元集合を T とし、T の各要素tに対して、関数値$\mathfrak{f}(t)$は実数だとする。そのとき$\mathfrak{f}$は集合 T で(in) 実数値関数である。この場合、$\mathfrak{f}(t)$のような関数は、かならず、一定のカテゴリーのすべての対象に対して定義されている（そのことは定義諸原理から直ちに導かれる）。ただしもちろん、関数値が自然数の四次元集合ではあるが、必ずしも実数値でないということも大いにあり得るが、それが実数値になるようなパラメーター値たちは、確定的な集合をなす。とくにカテゴリーK が自然数のカテゴリーであり、$\mathfrak{f}(t)$がすべての自然数tに対して実数値を取るなら、この関数は実数列(Folge reeller Zahren)あるいは簡単に数列(Zahlenfolge)と呼ぶ。K がカテゴリーRZ であり、上述の集合 T の要素が一つ残らず実数なら、$\mathfrak{f}$は実変数を持つ、T 内の実関数である。同様のことは多変数の関数についても言える。

[2-3-d] {実数と実数の和}

二つの実数 $\mathfrak{x}$ と $\mathfrak{y}$ の和(Summe)は $\mathfrak{x}$ と $\mathfrak{y}$ の関数である。 この和は次のように定義される（なおこの場合、$\mathfrak{x}$. $\mathfrak{y}$ はカテゴリーRZ に関係づけられた空所であり、m_1,n_1,m_2,n_2は「自然数」の空所に関係づけられている。）こう定義する。「関係Σ$(m_1,n_1；m_2,n_2 \mid x,y)$とは、x の要素組 $p_1,q_1;p_2,q_2$と、y の要素組 r_1,s_1,r_2,s_2 があって、$(m_1/n_1-m_2/n_2)=(p_1/q_1-p_2/q_2)+(r_1/s_1-r_2/s_2)$. となることを意味する」と。Σの縦線は空所を従属なグループと独立なグループに分けるが、それによって関数 $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ が、すなわちその値が常に自然数の 4 次元集合（正確には有理数たちの領域）になるような関数 $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ が得られている。 とくに変数値 $\mathfrak{x}$. $\mathfrak{y}$自体が実数なら、この数領域はかならず（空領域でも全体領域でもない）開切片となり、したがってこれも実数となる。交換法則と結合法則が成り立つ。[ちなみに]加法が成り立つ以上、一義的なその逆転(eindeutige Umkehrung)つまり減法(Substruktion)も成り立つ。

[2-3-e] {実数の大小関係}

$\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$とは$\mathfrak{a}$が$\mathfrak{b}$の部分集合であること、ただし$\mathfrak{a}$は $\mathfrak{b}$ と同一でないことを意味する。この実数の圏域でも、三つの可能性 $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$、$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}>\mathfrak{b})$ は完全な選言関係(Disjunktion)を結ぶ（有理数領域の拡張された圏域ではそうはいかないが）。$\mathfrak{a}$と $\mathfrak{b}$ は基礎カテゴリー「自然数」の要素たちの 4 次元集合だから、これら[$\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$、$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$]のそれぞれは、$\mathfrak{a}$と $\mathfrak{b}$ の間の定限的な(finit)関係を表す。

[2-3-f] {実数⇒有理数の開切片}

λが有理数なら、＜λである有理数の全体は、(空集合でも全体集合でもない）開切片となる。[開切片である]この実数を ＊λ と表す。ただし[λ]自体は有理数と置いたことに(genannt)注意せよ。しかもこの実数[*λ]はλの関数である。その意味で、異なる有理数には異なる実数が対応することになる。　　　　　　すべての実数に対して一般に、$\mathfrak{a}$+*0=$\mathfrak{a}$が成り立つ。>*0 となる実数は正、<*0 となる実数は負であると言う。

[2-3-g]　　　　　　　　　　{開切片と開残片}

定義に登場する「 < 」をすべて 「> 」で置き換えることによって、開切片の概念は開残片（das offenen Reste）に移行する。開切片$\mathfrak{a}$の「相補(Ergänzung)」が開残片である。開残片とは、切片$\mathfrak{a}$に属さない何らかの有理数よりも大きな有理数が属すような、そしてそれだけが属すような領域である。逆に開残片にはその「相補」として一つの開切片が対応する。相補関係は相互的関係である。

[2-3-h]　　　　　　{実数の自然数倍、分割、折り返し、積、商}

実数たちは加算可能な量(addierbare Größen)の圏域をなすが、この領域では自然数倍、分割、「折り返し(Umklappung)」を一義的に遂行することができる。[それはこういうことである]。　　　$\mathfrak{x}$に属す各有理数を自然数 m 倍、または分数α倍することによって、開切片$\mathfrak{x}$から切片（実数）m$\mathfrak{x}$, $\alpha\mathfrak{x}$が得られる。λを任意の有理数とすると、$\mathfrak{y}$＝λ$\mathfrak{x}$とは、λ＝0 なら$\mathfrak{y}$ ＝* 0、または分数αでλ＝＋αとなるものがあるなら$\mathfrak{y}$ ＝$\alpha\mathfrak{x}$、または分数αで=―αとなるものがあるなら$\mathfrak{y}$ ＝―（$\alpha\mathfrak{x}$）となることを謂う。この積λ$\mathfrak{x}$はλと$\mathfrak{x}$から一義的に決まる実数である。　　　　最後に$\mathfrak{a}$と$\mathfrak{x}$が実数で、$\mathfrak{x}$が正なら、$\mathfrak{a}$・$\mathfrak{x}$とは次のような領域のことである。すなわち、「有理数μの領域、しかも$\mathfrak{a}$に属す有理数λがあるときはその領域に属し、$\mathfrak{a}$に属す有理数λがないときにはその領域に属さない、そのような有理数μの領域」がそれである。$\mathfrak{x}$ が負なら、$\mathfrak{a}$はそれを相補する開終片で置き換える。そのとき$\mathfrak{a}$・$\mathfrak{x}$はまたかならず実数となる。$\mathfrak{a}$・*0 は実数*0 である。この定義から積算の基本性質を導くことは容易である。　　　和の場合と同様に、二つの実数の積もこれらの数の関数であり、それを確認したければ、[上記の]すべての定義が第一章の一連の原理から構築できることを一歩一歩押さえればよい。(ただし議論は短いし内容も簡単なので、厳格な叙述は不必要と判断した。）二つの実数の差と商は、これもまた、その両方のパラメーターの関数となる。もちろん商については、それが再び実数となるのは、分母が≠0 のときに限る。例えば、「商」の関数はこう定義できる。すなわち、この関数は関係　$Q(m_1,n_1 : m_2, n_2.|x ,y)$. に対応する。ただしこの関係の意味するところはこうである。x と y と有理数　$\lambda = m_1/n_1 - m_2/n_2$ が、以下の条件を、すなわち、 $\mathfrak{y}$ が正で λ$\mathfrak{y}$ <x であるか、または $\mathfrak{y}$ が負で λ$\mathfrak{y}$ >x であるという条件を満たすか、そのいずれかであること。

[2-3-i] {実数と代入原理}

ここで代入原理(第一章 §7）から次の事柄が導かれる。 $\mathfrak{f}$と$\mathfrak{g}$を、同じ集合に存在する(existierend)二つの実数値関数とすると、それらの和、差、積、商もやはり実数値関数となる。ただし商については、ここでも、g は全存在領域(Existenzbereich)にわたって≠0 でなくてはならない、という制限がつく。これは、過去の解析学が関数概念に際して代数的構成原理の姿で思い浮かべていたものを、我々の[射程の広い]論理的構成原理が、その論理的構成原理の個別適用例として導いてみせることのもっともわかりやすい実例である。これに類する、しかもこれから先頻繁に用いられる二つの基本原理は、原理 2 と 7 から直接導かれる。すなわち、1)同じカテゴリーを動く複数のパラメーターを持つ関数から、これらのパラメーターを「重ねる」ことで、新しい関数が得られる。$\mathfrak{g}$(s,t)から関数$\mathfrak{f}$(t,t)が得られる。云々。2)たとえばすべての実数のパラメーター値に対して存在する実数値関数において、そのパラメーターに別の実数値関数を代入することができる。云々。

[2-3-j] {実数と量測定}

[私がここに示した] 分数、有理数、実数の定義(Definitionen)が、たしかに或る程度、恣意的(willkürlich)であることは否定しない [つまり他の定義があり得ないとまでは言わない]。[ところで] これらの定義が担う本来的な意義は、それが或る量圏域(Größengebiet)における量の測定(Messung)において果たす役割(Roll)に、つまり量たちの間に成立する関係をどう抽象的に表現するかという点にこそある。こうした目的に照らすとき、数の概念がとりあえず純粋に概念的・算術的に確定されていることが何よりも大切なのであって、[その意味では]ここに述べたような量たちの関係を一義的に(eindeutig)特徴づけることさえできておれば、どんな定義でも構わないのである。ただ我々が選んだ定義が、この目的に叶う定義のうちでもっとも簡単でもっとも自然であることは誇ってよいだろう。量理論への展開については後で[§7]立ち入って説明する。

[2-3-k] {関数 $\mathfrak{x}^{n}$}

以下の議論には実数 $\mathfrak{x}$ と自然数 n からなる関数 $\mathfrak{x}^{n}$ が必要である。この関数は$\mathfrak{x}^{n}\mathfrak{y}$で $\mathfrak{y}$を $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ に置き換えれば $\mathfrak{x}^{n+1}\mathfrak{y}$ が得られることを拠り所に、再帰(Rekursion)[という手続き]で得られる。まずπ(λ｜$\mathfrak{x}\mathfrak{y}$)を、「$\mathfrak{x}$ と $\mathfrak{y}$ は実数であり、[有理数] λ （=m_1/n_1—m_2/n_2）は切片$\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}$ の要素(Element)である」と主張する関係とする。具体的にはλは「自然数」のカテゴリーに関係づけられた空所 $m_{1,}n_{1:}m_{2,}m_2$のことである。 これらの空所を[縦線を使って]従属空所と独立空所に分けることによって、上記の関係から関数$\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}$が生じる。この関数を繰り返し空所 $\mathfrak{y}$ に代入することで π(λ｜$\mathfrak{x}\mathfrak{y}$;n)が得られ、最後に$\mathfrak{y}$ に実数 1 を代入して生まれる関係に相応するのが関数 $\mathfrak{x}^{n}$ である。

[2-3-l] {代数的数をめぐる、関係と性質}

この流れで代数的数(algebraische Zahl)について語ることもできる。よく知られているように、n 個の有理数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ が存在し、$\mathfrak{a}^n = \lambda_1\mathfrak{a}^{n-1} + \lambda_2\mathfrak{a}^{n-2} + \cdots + \lambda_n$ となるときに [つまり $\mathfrak{a}$ が、これと同じ次数と係数を持つ方程式の解になるときに]、実数 $\mathfrak{a}$ を「次数がたかだか n の代数的数」と呼ぶ習いである。そうすると、[たとえば]「 $\mathfrak{a}$ は次数がたかだか 3 の代数的数である」は確かに実数の定限的な(finit)性質であり、[当然]すべての他の自然数[の次元]についても同様のことが言える。ところで命題、「$\mathfrak{a}$ はたかだか次数 n で代数的である」は、[次数に制限を課すことなき]、 $\mathfrak{a}$ と n の間の定限的な関係(Relation)の判断図式(Urteilsschema)の名に値するのか、したがって「代数的(algebraisch)であること」は（次数に制限を課すことなき）定限的な性質(Eigenschaft)の名に値するのかと問われると、一見したところそれは成り立たないようにも見える。それどころか、[前者を定限的な関係、後者を定限的な性質と呼ぶためには]、「不定個数(unbestimmt)」の空所を持つ関係を導入し（これは論理的に非常に際どい(fatal)手続きになるだろうが)、併せて、原理とりわけ反復原理を、上記の関係に適合すべく極度に複雑なやり方で拡張する羽目になりはしないか、と懸念される。　　　　しかし[実は]決してそうではない。このような状況にも我々の定義諸原理だけで十分対処できることを、私は代数的数の概念を使って示そうと思う。

[2-3-m]　　　　{代数的数と次数の関係は定限的(finit)である}

積の関数(Produktfunktion) $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ を拠り所にし、それを反復(Iteration)するという形で、我々は 冪(Potenz) $\mathfrak{a}^n$ の定義に成功している。そこでこれに倣って(analog)、$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, λ の関数 $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})-^*\lambda$ を採用し、それを反復するという形で、有理係数を持つ $\mathfrak{a}$ の n 次多項式の構成を試みようと思う（ただし λ は任意の有理数とする）。　　　　[まず]この関数を生み出す関係を $\Gamma(\mu \mid \lambda; \mathfrak{a},\mathfrak{b})$ と置く。[ちなみにこの関係の意味はこうである]。「有理数 μ, λ の和は切片 $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ の要素であり、さらに μ と λ はそれぞれ、自然数に関係づけられた四つの空所を表現している(stehen für)」と。ここから先 L と表記される空所たちは、カテゴリーRZ の対象たちから成る 2 次元集合に関連づけられている。そこでこう置く。

$$\varepsilon(\mathfrak{a}, (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) -^* \lambda; L) \mid_{L=\cdot} = \Delta(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \mid L)$$

その意味するところはこうである。すなわち、 $\mathfrak{a}$ と $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})-^*\lambda$ が[ともに] L の要素ペア(Elementenpaar)となるような、そのような有理数 λ が存在する、と。以前にもしたように、Δ の空所たちを独立な空所と従属な空所に分けることで、反復の条件が得られる。こうして次のような内容の関係 $\Delta(\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \mid L; n)$ が得られる、すなわち、「n 個の有理数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ があって、しかも、$\mathfrak{a}$ と、

(5).　　　$\mathfrak{a}^n\mathfrak{b} - (\lambda_1\mathfrak{a}^{n-1} + \lambda_2\mathfrak{a}^{n-2} + \cdots + \lambda_n)$.

とが L の要素ペアをなす」という関係がそれである。[ところが] この表現(5)は次のように書き下すことができると考えられる。すなわち

$$\mathfrak{a}\cdot(\cdots\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} -^*\lambda_1) -^*\lambda_2) -^*\lambda_3)\cdots) -^*\lambda_n$$

そこで、𝔟には実数 *1 を、L=L(𝔞 , 𝔟)には ＜𝔞は実数であり𝔟 =*0 である＞という関係に相応する或る２次元集合 L_0 を、それぞれ代入すればよい。[ところが]こうして生まれる関係

$$\Delta(\mathfrak{a},{*1} \mid L_{0.};\, n)=\ \Delta(\mathfrak{a},n)$$

は、「𝔞は代数的に次数たかだか n である」を意味する。すなわちΔ(𝔞、∗)は、𝔞 に備わる「代数的である」という [定限的]性質(Eigenschaft)の、その判断図式になっている。

[訳者。「ペア」と訳した Paar という言葉は次の[2-3-n]で厳密に定義される。]

[2-3-n]　　　　　　　　{複素数の導入}

<u>複素数</u>(die komplexen Zahlen)は慣例にしたがって実数の<u>ペア</u>(Paar)として導入する。[ただし]私はペアの構成(Paarbildung)を、以下のように極めて一般的な(ganz allgemein)意味合いで理解する。例えば A が 3 次元集合、B が 2 次元集合の場合（ただし、集合はどんなカテゴリーの集合でも構わないが、A も B もそのカテゴリーの空集合ではないとする)、この場合、ρ , σ , τ が[集合]A の要素組(Elementensystem)をなし、ξ , η が[集合]B の要素組をなすときに限って、ρ , σ , τ ；ξ , η という要素組を要素とする 5 次元集合 A●B が存在する（なお原理 3 には従うが、変数の重なりは伴わないとする)。この 5 次元集合 A●B を、 A と B のペアをと呼ぶのである。　　　　集合 A と B をどちらもそのカテゴリーについて不定(unbestimmt)[可変]とみなすとき、[当然]このペアは A と B の関数(Funktion)になる。　　　　[また]逆に、A と B がともに基礎カテゴリーの対象たちの集合だとすると、[関数の]二つの項(Glieder) 、すなわち A も B も [それぞれ]ペア A●B の関数になる。[その理由はこうである]。まず [集合]A●B が属すカテゴリーの任意の集合Γを考えたうえで[つまりρ , σ , τ ；ξ , η という形をした要素たちの<u>或る</u>集合 *Γ*を考えたうえで、つまり要するに或る複素数を考えたうえで]、ρ , σ , τ ；ξ , η が[上の] *Γ*の要素組を形成するような、二つの対象ξとηが存在する(es gibt)ことを述べる関係 R(ρ , σ , τ ｜ *Γ*)を考える。そのとき、この関係[R(ρ , σ , τ ｜ *Γ*)]から[集合] *Γ*の[或る]関数が生まれるが、この[関数]Γにペア A●B を代入すると、このペアの第一項 A が[関数値として]得られる。そういう訳で、「A と B からなる関数」と「ペア A●B の関数」という二つの概念は、代入原理を許容する限り本質的に一致するのである。　　　　―― [ここで話を複素数に戻すと]、上記の論を踏まえる限り、複素数たちとは自然数たちの 8 次元の集合のことである。より正確にいえば、複素数たちとは有理数たちの二重領域(Doppelbereich rationale Zahren)のことである。

[訳者。 *Γ*はガンマ。要素組(Elementensystem)については[1-6-b]の注を参照せよ。]

§4. 数列　収束原理

[2-4-a]　{下極限}

𝔣(n)を実数の列とする。関数𝔣(n)がどのようにを生み出されるかというと、有理数λと自然数nの関係R(λn) がそれを生み出すとする。つまりnにとって𝔣(n) とは、nとこの関係づけRを結ぶ有理数たちの領域(Bereich)[だから実数]のことなのである。(λ＝$p_1/q_1-p_2/q_2$はここでも、自然数のカテゴリーに関係づけられた四つの空所p_1 q_1; p_2 q_2を表す)。　この数列に対して、よく知られたやり方で下極限(limes inferior)を構成する。数列の下極限とは、有理数たちの或る領域[つまり実数]のことなのだが、ただし、或る有理数λ′＞λに対して、それ(n)より大きいすべてのmに対して、関係R(λ′ m)が成り立つ時に限って、λがそれに属すような、そのような有理数たちの領域を謂う。　この領域𝔞は開切片である。つまり或る実数であるか、空領域であるか（この文脈では―∞という記号が通常使われる)、全領域＋∞であるかである。これを$\lim_{n=\infty} \mathit{inf}$ 𝔣(n)＝𝔞 と書く。Rは同時に関係R(λn)に対応する「領域」（自然数の5次元の集合）も意味するので、このlim inf　がRの関数でもあることはおわかりだろう㉚。

[2-4-b]　{コーシーの収束原理}

下極限(lim inf) の存在(Existenz)からコーシーの収束原理の妥当性(Gültigkeit)が導かれる。周知のように数列が収束する(konvergent)とは、任意の分数αに対して或る自然数nが取れて、nより大きいすべてのpとqに対して、領域𝔣(p) － 𝔣(q)　内に有理数　$-\alpha$は 属しても ＋αは属さないようにできることである。さらに、この数列が実数𝔠に収束するとは、各分数に対して自然数nが取れて、nより大きいすべてのpとqに対して、領域𝔣(p) −𝔠 に有理数―αは属しても、有理数+αは属さないようにできることである。これらの定義のどれを見ても、論理的な用語「存在する」、「すべての」、「各々」はかならず自然数と結びついて登場している。[コーシーの] 収束原理の意味するところは、数列𝔣(n)がそれに向けて収束する実数𝔠が存在する(es gibt)のは、この列[f(n)]が収束的であるときであり、そのときに限る、ということである。この収束原理が妥当するとき、𝔠はまさにこの数列のlim infと一致し、𝔠は端的に[この数列の]極限(Limes)、あるいは極限値(Grenzwert)と呼ばれる。　以上の内容はすべて、適切に読み替えることによって(sinngemäß)、関数列(Funktionsfolge)にも転用される。すなわち列を定義する関係R(λ｜n)において、ここに登場した空所たちの他にもう一つ空所がある場合にも転用される。たとえば、この関係の中にカテゴリーRZに関係づけられた空所𝔵が現れるなら、こ

の関係から関数列 $\mathfrak{f}(\mathfrak{x},n)$が生じるだろうが、そのとき、 $\liminf_{n=\infty} \mathfrak{f}(\mathfrak{x},n)=\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$もまた実変数 $\mathfrak{x}$ の関数なのである。これは極限過程の構成原理の解析版(das analytische Konstruktionsprinzip des Grenzübergangs)と言える。多くの場合 n は添字として書くのが普通である。 しかしこれはきちんと押さえてほしいのだが、この極限過程の構成原理は、どうやって集めたのかも定かでない関数の無限列 $\mathfrak{f}_1(\mathfrak{x}), \mathfrak{f}_2(\mathfrak{x}), \mathfrak{f}_3(\mathfrak{x})$・・・に適用できる訳ではなく、それは、(法則に則って形成された、そして第一章で明確に確定された意味での) $\mathfrak{x}$ と(und) n の関数である $\mathfrak{f}_n(\mathfrak{x})$ だけに適用されるのである。.

[2-4-c] {解析の基礎原理の候補者たち}

コーシーの収束原理以外にも、それと同値という触れ込みで(vermeintlich)さまざまな基礎原理が解析学の出発点の候補者として立てられてきたという経緯がある。そのいくつかを挙げてみよう。

I 互いに入れ子になった区間(Intervall) の列で、その[区間の]長さが、どんなに[小さい]限界を出されても、なおそれを超えて小さくなるような、そのような列は、特定の値を追い詰めることができる(abfangen)。(これは例えば十進小数展開に応用される)。

II 実数の単調増加数列で、そのすべての数が或る特定の限界を超えないなら、この数列がそこに収束するような一つの数が存在する(es gibt)。

III デデキントの切断原理 A と B が実数たちの二つの集合で、A の要素となっているどの数も B に属す数よりも小さいとし、またどんな分数αに対しても、A に属す数 $\mathfrak{x}$ と B に属す $\mathfrak{y}$ が、領域 $\mathfrak{y}-\mathfrak{x}$ に$+\alpha$が属さないようにとれるとする。この場合、それより大きい、A の要素である数はなく、それより小さい、B の要素である数がないような、そのような実数 $\mathfrak{c}$ がただ一つ存在する(es gibt)。

IV 実数の有界(beschränkt)集合は一つの(präzise)最小上界と最大下界(obere und untere Grenze)を持つ。

V 実数の有界無限集合はかならず集積値(Verdichtungswert)を持つ。

[2-4-d] {承前}

いまや確固たる基礎の上に確立された解析学に照らせば、これらの定理のうちで妥当(gültig)なのは I と II である。ただし、「互いに入れ子になった区間の列」は、次のような諸性質を持つ二つの数列 $\mathfrak{f}(n),\mathfrak{g}(n)$ と解する。すなわち、n'を n の直後の数として、$\mathfrak{f}(n) < \mathfrak{f}(n')$, $\mathfrak{g}(n) > \mathfrak{g}(n')$, $\mathfrak{f}(n) < \mathfrak{g}(n)$ という性質がそれである。 それ以外の主張すなわち III から V は非妥当である。ただしそこに登場する「実数の集合」を「有理数の領域」で置き換えたものは妥当である。

[訳者。デデキントの切断理論への批判は[1-3-f]を参照]。

[2-4-e] {ハイネ・ボレルの定理}

いわゆるハイネ・ボレルの定理は次の版で与えておく。

VI　区間の列Δ_nがあるとする。しかも、単一区間(Einheitintervall) *0 ≦ $\mathfrak{x}$ ≦ *1 に含まれるどの実数も、前記の区間の列のどれかの区間内(innern)に位置しているような、そのような区間の列Δ_nがあるとする。そのとき自然数 n をとって、[単一区間(Einheitintervall) *0 ≦ $\mathfrak{x}$ ≦ *1 に含まれるという]その実数たちが、すべてすでに有限個(endlichviel)の区間$\Delta_1\Delta_2$・・・Δ_n　のどれかの内部に収まっているようにできる。

[2-4-f] {区間列の概念の精密化}

この定理をここでも[Weyl の解析学でも]妥当させようというのなら、「区間の列」の概念を正しく理解する必要がある。なぜなら、この場合、次の命題、すなわち「有理数λに相応する実数 *λは負であるか、区間たち$\Delta_1\Delta_2$・・・Δ_n　のどれか一つの内部にあるかのどちらかであり、同じことはすべてのλより小さい有理数に対しても成り立つ」という命題は、λと n の間の確定的(finit)な関係 R(λ, n)を表しているからである。この申し立て(Behauptung)が間違いなら、性質 R(λ, *)に相応する集合は、すべての負の有理数を含む開切片となるだろうが、有理数 1 はもちろん含まれない。従って、この開切片は単一区間に含まれる実数となろう。そこで、この実数に対して前提された、それを内部にもつ区間Δm なるものを考えると、矛盾が生じてしまう。[だからこの申し立ては間違いではない]。　　　これに対して、ハイネ・ボレルの定理で区間の列(folge)を任意の区間の集合(Menge)で置き換えたもの、あるいはΔn で添字 n で表示されているパラメーターn の代わりに基礎カテゴリー「自然数」に結び付けられていないものが現れるようなものは間違っている。特に次の申し立てはできない。「単一区間上に存在する二つの実数値関数 $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$、$\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ があって、すべてのパラメーターに対して、不等式$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) < \mathfrak{x} < \mathfrak{g}(\mathfrak{x})$を満たすとすると、単一区間のなかに有限個の実数$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2,$・・・$,\mathfrak{a}_n$があって、これらの実数については、「やはり単一区間に属すどの数 $\mathfrak{x}$ に対しても、$\mathfrak{a}_i$のうちに或る数があって、$\mathfrak{f}(\mathfrak{a}_i) < \mathfrak{x} < \mathfrak{g}(\mathfrak{a}_i)$が成り立つ」という申し立ては、できない。

[2-4-g] {ディリクレ原理の無効性}

従来、解析学のあらゆる申し立ての導出に際して利用されてきた基礎命題のいくつかが非妥当とされたことで、当然、現在まで承認を受けていた概念構成や証明が、或るものは変更を被り、或るものは全面破棄せざるを得なくなる。もっとも深刻な影響を及ぼすのは、基本原理 IV の無効性である。ディリクレ原理(Dirichletschen Prinzipien)の論法は、たとえヴァイエルシュトラスの批判に応えて、「極小値」ではなくより控えめな「下限」の存在の主張に改変されても、やはり維持できない。　　　さらに今日の解析学で慣例となっている[カントール式の]考え方から出発する場合、「実数の無限集合がある

からと言って、この集合に属す数だけから成る数列 $\mathfrak{f}(n)$ の存在が保証される訳ではない」ということに、常に注意を怠ってはならない。

[訳者。最後の文章については[1-5-d]の結びを見よ]。

[2-4-h]　　　　　　　　　　{無限級数}

無限級数（和）の原理は、部分和を構成するというやり方で、数列の理論に帰着させることができる。$\mathfrak{f}(n)$ を実数列とし、「$\mathfrak{b}$が実数で有理数λが切片 $\mathfrak{f}(n)+\mathfrak{b}$に帰属する」という関係をU（λ｜$\mathfrak{b}$,n）とする。この関係が関数 $\mathfrak{f}(n)+\mathfrak{b}$ を引き起こす。反復原理（その3番目の拡張[1-7-e]）(page28) により、これから次のようにV(λ｜$\mathfrak{b}$,n)を得る。すなわち

$V(\lambda \mid \mathfrak{b},1)=U(\lambda \mid \mathfrak{b},1).\quad V(\lambda \mid \mathfrak{b},n')=V(\lambda \mid \mathfrak{f}(n')+\mathfrak{b},n)$

V(λ*0,n)から生じる実数列 $\mathfrak{s}(n)$は、次の再帰式により当初の実数列と結び付いている。すなわち　　$\mathfrak{s}(1)=\mathfrak{f}(1).\quad \mathfrak{s}(n+1)=\mathfrak{s}(n)+\mathfrak{f}(n+1)$

[2-4-i]　　　　　　　　　　{関数列}

級数と数列の関係は、適切に変更を加えることによって、1実変数または多実変数の関数を項に持つ級数に拡張される。たとえば前節で規定された $\mathfrak{x}^n$ は、$\mathfrak{x}$ と n の関数をなすので、$\mathfrak{f}(n)$が実数の列だとすると、冪級数 $\Sigma\mathfrak{f}(n)\mathfrak{x}^n$ の部分和たちは関数の列をなす。したがってその極限（存在するとして）は $\mathfrak{x}$ の実数値関数である。同様のことは、無限積についても言える。

[2-4-j]　　　　　　　　　　{初等関数}

<u>初等関数</u>(elementaren Funktionen)、とくに指数関数(Exponentialfunktion)は、初等的でない関数の構成にも使用される無限過程（unendliche Prozesse）を使って定義することもできる。対数関数[という初等関数]は（連続で単調な）指数関数の逆関数として定義できる（逆関数については次節[§5]を参照せよ）。

§5. 連続関数

[2-5-a]　　　　　　　　　　{関数}

単一区間（Einheitsintervall）上の実数パラメーター値 $\mathfrak{x}$ に対して存在する実数値関数(reellwertige Funktion) $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$を考える。ただしこの関数は関係R（λ｜$\mathfrak{x}$）から生まれるものとする。　　　　この場合、方程式 $\mathfrak{y}=\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$は $\mathfrak{x}$と$\mathfrak{y}$ の定限的(finit)関係を表現

する。なぜならこの方程式は、「 𝔵に対して関係 R(λ｜𝔵)にあるすべての(all)有理数は領域(Bereich) 𝔶に属し、またそれだけがその領域(Bereich) 𝔶 に属す」と言明しているからである。(実際、ここですべて(all)という言葉は「有理数」だけを念頭に置いて使われている)。　　　　　この場合、方程式は定限的関係を表現することになるので、[今度は特定の] 𝔶 が与えられた場合、「𝔣(𝔵)= 𝔶となる単一区間の数たち𝔵 」にせよ、「𝔣(𝔵)> 𝔶となる単一区間の数たち𝔵 」にせよ、あるいはまた「𝔣(𝔵)＜𝔶となる単一区間の数たち𝔵 」にせよ、いずれも[数集合は数集合でも] 𝔶の或る関数であるような数集合(eine Menge,die eine Funktion von 𝔶 ist)を形成することだろう。　　　　　ただし、或る関数 𝔣 の値の[実数を含めた]全体(Wertvorrat)が定限的な数集合になると一般的に言える訳ではないし、たとえ[𝔣が]有界な関数であっても、関数 𝔣 に対して確定的な(präzise)上限や下限が存在すると一般的に言える訳でもない。

[2-5-b]　　　　　　　　　{連続性・一様連続性}

[ここからは] とくに連続関数(stetige Funktion)を話題にする。記号 ｜𝔵｜≦ α を導入するが、その意味はこうである。𝔵 は実数 [つまり有理数たちの領域] であり、分数αに相応する(Korrespondieren) 有理数＋αは、この実数 𝔵に[つまり有理数たちの領域 𝔵 に] 属さないが、$-\alpha$より小さい有理数なら領域(Bereich)に属す、そのような実数 𝔵 であると。　　　　　連続性(Stetigkeit)の定義は周知のそれを当てる㉛。すなわち、𝔣(𝔵)が（単一区間に含まれる）数 𝔞 で連続とは、任意の分数αに対して、ある分数βが存在し、不等式｜𝔵−𝔞｜≦ β を満たす単一区間のすべての実数 𝔵 に対して、 ｜𝔣(𝔵)−𝔣(𝔞)｜≦α が成り立つ」ことである、と。ここから、関数が或る値𝔞で連続であることが、[関数の] 超限的(transfinit) な性質であることがわかる（し、同時に、この[連続という]性質が、「実数」概念の外延(Umfang)の正確な画定に影響されることもわかる。）このことが解析学とその応用(Anwendungen)に対して持つ重大な意義については、次節[§6] に至って初めて詳しく説明する。　　　　　関数 f(𝔵)が単一区間で連続とは、関数がこの単一区間のどの値でも連続であることを謂う。関数が単一区間で一様連続(gleichmäßig stetig)であるとは、どの分数αに対しても或る一つの分数βが配属され、単一区間のすべての数 𝔵, 𝔜 について、不等式｜𝔵 −𝔶 ｜≦ βが成り立つなら｜𝔣(𝔵)−𝔣(𝔶)｜≦αも成り立つことを謂う。

[訳者。αと𝔞 が紛らわしい。]

[2-5-c]　　　　　　　　　　{主要定理}

連続関数に関して以下の主要定理を証明する。

(A)　連続関数はすべての中間値(Zwischenwerte)を取る。つまり𝔣 が連続関数で、

　　𝔣(𝔞)＜𝔳 < 𝔣(𝔟)

だとすると、$\mathfrak{f}$（$\mathfrak{c}$）＝ $\mathfrak{v}$となるような実数$\mathfrak{c}$ が $\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$の間に($\mathfrak{a} < \mathfrak{c} < \mathfrak{b}$)存在する(es gibt)。
(B) 単一区間上での連続関数は、この単一区間で最大(Maximum)と最小(Minimum)を持つ。つまり、二つのパラメーター $\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$ で、単一区間の全域にわたって

不等式 $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \leqq \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \leqq \mathfrak{f}(\mathfrak{b})$

が成り立つような、そのような二つのパラメーター $\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$ が存在する(es gibt)。
(C) 単一区間で連続な関数はその単一区間で一様連続である。

[2-5-d] {証明の変更箇所}

これらの定理を証明するに当たっては、通常の[証明]手続きに或る変更を加えざるを得ない。というのは、関数 $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$は[たしかに]単一区間上に存在する実数値連続関数ではあるのだが、我々はその $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$がとる値を有理数のパラメーター値に絞って考察するからである。すなわち我々は

$\mathfrak{f}(^*\lambda)=\mathfrak{f}^*(\lambda)$

を構成するのである。（この場合、実数 $^*\lambda$が有理数λの関数であることに注意されよ）。すなわちここで$\mathfrak{f}^*(\lambda)$は、実質的には(in Wahrheit)、「自然数」のカテゴリーに関係づけられた四つのパラメーターの関数を表す。[訳者。$^*\lambda$という表記については 2-3-f を参照]。

[2-5-e] {中間値の定理の証明}

A の証明。$\mathfrak{f}(^*0)$を負、$\mathfrak{f}(^*1)$を正としたうえで、$\mathfrak{f}(\mathfrak{c}) = 0$ となる単一区間の数 $\mathfrak{c}$ の存在を示せば十分である。次のような有理数たちの領域(Bereich rationale Zahlen))を考える。すなわち、それより大きい或る（単一区間の）有理数$\lambda'(>\lambda)$で、$\mathfrak{f}^*(\lambda')$ が負になるようなものが存在するなら、[有理数]λはこの領域に属すが、そのような$\lambda'(>\lambda)$が存在しないなら、[有理数]λは件の領域に属さない、そのような有理数λたちの領域を考える。[まさに]この領域(Bereich)が実数 $\mathfrak{c}$ である。[なぜなら]パラメーター値 $\mathfrak{c}$ における$\mathfrak{f}$ の連続性から、周知のやり方で、$\mathfrak{f}$ は正でも負でもあり得ないことが示せて、そこから $\mathfrak{f}(\mathfrak{c})={}^*0$ が示せるからである。（ちなみにこの証明法は$\mathfrak{f}$ の最大の 0 点の構成法になっている。）

[2-5-f] {最大・最小の存在定理の証明}

B の証明。単一区間内における$\mathfrak{f}^*(\lambda)$の上限 $\mathfrak{m}$とは、有理数の或る数領域のこと、しかも、単一区間内の有理数λについて、$\mu<\mathfrak{f}^*(\lambda)$となるなら$\mu$もそれに属すが、そうでないときには属さない、そのような有理数の或る数領域のことである。$\mathfrak{m}$ は実数か、全領域（$+\infty$）か、そのどちらかになる。$\mathfrak{f}(x)$が連続関数だという前提から、有理パラメーターだけでなくすべての実数値パラメーターx に対して不等式 $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \leqq \mathfrak{m}$ が成り立つことが直ちに導ける。

$\mathfrak{x}$ を $\mathfrak{x} > {}^*0$ かつ $\mathfrak{x} \leqq {}^*1$ であるような実数とする。 [有理数たちの]領域$\mathfrak{x}$に属す 0

または正のすべての[有理数]λに対して、$\mathfrak{f}$*(λ)の上限$\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{x}$)を作ることができる。二つの場合がある。

すべての有理数λ≦1 に対してこの上限が$\mathfrak{m}$(*λ)＝$\mathfrak{m}$となる場合には、$\mathfrak{a}$ を実数 *0 と解する。

そうでない場合には、有理数の領域 $\mathfrak{a}$ を、λがこの領域に属すのは、正の有理数λ’＞λ（かつλ’≦1 となるもの）が存在して、$\mathfrak{m}$ (λ’) < $\mathfrak{m}$となるときとなるように作る。この領域は実数である。　　　いずれの場合も$\mathfrak{x}$ =$\mathfrak{a}$ における$\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{x}$)の連続性から、$\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{a}$)が $\mathfrak{m}$より小さくはなり得ないことが直ちにわかる。ゆえに$\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{a}$)= $\mathfrak{m}$でなければならない。これで、$\mathfrak{m}$ が全領域+∞ではあり得ないことも同時に示された。(我々は$\mathfrak{f}$ が最大値を取るような $\mathfrak{a}$ のうち、最小のものを構成したことになる。$\mathfrak{f}$ が最小値を取るような $\mathfrak{b}$ も同様に構成できる。)

A と B はこうまとめることができる —— 連続関数が閉区間(abgeschlossene Intedvall)でとる値の全体(Wertvorrat)はふたたび閉区間となる、と。

[2-5-g]　　　　　　　　　　{一様連続}

<u>C の証明</u>に際しては、$\mathfrak{f}$($\mathfrak{x}$)は定数でないと仮定し、負の $\mathfrak{x}$ に対しては $\mathfrak{f}$($\mathfrak{x}$)= $\mathfrak{f}$ (*0) と仮定し、＞*1 なるパラメーター$\mathfrak{x}$ に対しては $\mathfrak{f}$($\mathfrak{x}$)=$\mathfrak{f}$ (*1) であると仮定する。こうすることで議論が容易になり、しかも一般性を失わない。$\mathfrak{x}$ を実数としてαを或る分数とする。すべての有理数λとμで、λは領域 $\mathfrak{x}$ に属し｜λ-μ｜は＜αであるという条件を満たすものに対して差の絶対値

(6)　　　　　　　　$|\ \mathfrak{f}^*(\lambda) - \mathfrak{f}^*(\mu)\ |$

の上限を作ると、この上限は $\mathfrak{x}$とαの実数値関数δ($\mathfrak{x}$、α)である。λは $\mathfrak{x}$に属すという制限を外して得られる上限をδ(α)と表す。

α<βならδ(α) ≧ δ(β) (＞*0)となり、δ($\mathfrak{x}$、α) ≦ δ(α)である。$\lim_{\alpha=0} \delta(\alpha) = {*}0$を示せば良い。

そこで、有理数λ’>λが存在して、これに対してδ（*λ’,α）<δ（α）が成り立つならλがそれに属すような、そのような有理数の領域 $\mathfrak{x}$ (α)を作る。$\mathfrak{x}$ (α)はαの実数値関数である。$\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$’を$\mathfrak{x}$ (α)を間に挟む任意の実数とする。つまり$\mathfrak{b}$ < $\mathfrak{x}$ (α)< $\mathfrak{b}$とする。この場合δ（α）は有理数λとμで条件 $\mathfrak{b}$≦ *λ< $\mathfrak{b}$’（λは$\mathfrak{b}$’に属すが$\mathfrak{b}$には属さない）かつ｜μ−λ｜<αを満たすものに対する、(6)の上限となっている。$\liminf_{n=\infty} \mathfrak{x}(1/n) = \mathfrak{a}$として、γを任意の分数とする。このとき、$\mathfrak{x}$ =$\mathfrak{a}$での f(x)の連続性から、$\mathfrak{a}$の両側に実数 $\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{b}$’があり、正の実数 e で、

(7) |𝔣(𝔵)−𝔣(𝔞)|≦ (1/2) γ が区間 𝔟 - 𝔢 , 𝔵, 𝔟'+ 𝔢に含まれるすべての𝔵に対して成り立つようなものが存在する。(7)から、

(8) 𝔟≦𝔵≦𝔟' で|𝔶 − 𝔵|< 𝔢なら|𝔣(𝔵)−𝔣(𝔶)|≦γである。さらに自然数nで、有理数+1/nが領域𝔢に属し、x（1/n）が 𝔟と 𝔟'の間にあるようなものが存在する。このとき、上の𝔵と𝔶に対して成り立つ不等式(8)から、γは、この n に属す上限∂(1/n)より小さいものではあり得ない。したがってα≦1/nなら ∂(α)≦γである。

[2-5-h] {代数学の基本定理}

定理 A は実多変数の連続関数に拡張することができる。<u>代数学の基本定理</u>は我々の解析学で[も]成立する。

[2-5-i] {逆関数}

[我々の解析では] 関数 𝔣(𝔵)の「<u>逆</u>(invers)」は一般に存在しない。たとえ[関数 𝔶 =𝔣(𝔵)が存在し、しかも] 或る集合Tに属すどの実数 𝔶 に対しても、𝔶=𝔣(𝔵)を成り立たせるような一つそしてただ一つの数[𝔵]が属すという事実があろうとも、それでも関数の逆は一般には存在しない。 それに対して、𝔣(𝔵)が単一区間上に存在する<u>連続単調</u>関数(stetige monotone Funktion)なら、この関数の逆関数の存在を証明することができる。たとえば、 𝔣(𝔵)が単調<u>増加</u>だとする、すなわち𝔞 と𝔟を単一区間に属す二つの実数とし、𝔞を小さい方とすると、 𝔣(𝔞)< 𝔣(𝔟)が常に成り立つとする。[そこで] 𝔶が実数の場合、「すべての負のλがそれに属すような、またそれ以外には、 𝔣*(λ）< 𝔶 が成り立つような，λ＜1のすべてλが属すような、そんな有理数の領域(Bereich))を作ればよい。ところがこの領域は一つの実数であり(dieser Bereich ist eine reelle Zahl)、しかもパラメーター に対する或る関数 𝔤(𝔶)の値になっている。[つまり] 変数 𝔵 と𝔶 を区間 *0≦𝔵≦ *1, 𝔣(*0) ≦ 𝔶 ≦ 𝔣(*1). に限定すると、関数 𝔣と g は互いに逆(inverse)である。つまり 𝔣(𝔤(𝔶))＝𝔶 、𝔤(𝔣(𝔵))＝𝔵である。

[2-5-j] {微分と積分}

<u>微分</u>(Differentiation)と<u>積分</u>(Integration)が関数生成の過程として果たす役割は、話を<u>連続</u>関数たちの圏域(Gebiet)に限れば、[ここでも] 旧来の解析学の場合とそっくり同じ範囲で継承される。[解析の]基礎固め(Begründung)という点では、[旧来の基礎固めに]本質的な変更を加える必要がないのである。もちろん、リーマン、ダルブー、カントール、ジョルダン、カラテオドリーのさらに高度な積分理論や測度理論については、話はそれほど簡単ではない。

§6. 直観的連続体と数学的連続体
(anschauliches und mathematisches Kontinuum)

[2-6-a]　　　　　　　　　　{省察}

自然数から歩み出して純粋数論構築の行程を辿ること、しかも歴史的存在である算術と解析を道標とし、自らが発案した定義原理を杖として一歩また一歩と前進すること —— ここまでの議論はそのようにまとめることができる。さてここで、脇目も振らぬこの歩みを一旦は中断し、現状、自分がどこに到達しているのかを改めて問うてみようではないか。

[2-6-b]　　　　　　　　　　{超限性と開放性}

すでに見たように、関数の連続性(Stetigkeit)は [関数の]超限的(transfinit)な性質であった。それはこういうことである。我々の立てた諸原理を使って或る関数が定義されているとする。この関数が連続か否かという問いに決定(Entscheidung)を下すには、自然数に遺漏なく目配り(Überblickung)するだけでは不十分であり、それと並行して、これらの諸原理の適用を気の済むまで複雑化することによって生まれるであろう[すべての]集合（正確には自然数の四次元集合）にも、遺漏なく目配りがなされていなければならない。このことは、我々が一連の定義原理を「開かれた系(ein offenes System)」として扱うことを意味するから、つまりそれを、ことと次第によっては(ev）新しい原理の更なる追加によって拡大されうる可能性に開かれたものとして扱うことを意味するから、一般に、「与えられた関数は連続であるか」という問いもまた、開かれた問い(offene Frage)とならざるを得ない。このことはあらゆる定限的な(finit)問いの決定の場合と好対照をなす[ので、この特性をとくに超限的と呼ぶ次第である]。定義原理が拡張されたために、この拡張によって新たな構造を獲得した[新型の]実数が、それまで(jetzt)在るとされていた実数に新たに参加するとき、それまでの定義[方式]で連続的だったはずの関数が、その[連続性という]性質を失うこともなしとしない(könnte)㉜。

[2-6-c]　　　　　　{連続をめぐる、直観的所見と概念的言明}

質点の位置(Ort eines Massenpunkt)を時間の関数として表示するような関数を考える。[しかもこの関数には、前節で触れたような、連続だったはずの関数が定義原理の改変によって連続でなくなるなどの出来事が、まだ起こっていないとする]。ここで次の二つを比較してみよう。[一方に]、「この関数は連続である」と述べる概念的な言明(begriffliche Aussage)を置く、あるいはもっと素朴な言い方をするなら、「パラメーター値が或る区間内のすべての実の値を取るとき、この関数はこの関数で、或る可動域(Spielramu)に属す値だけをとる」という言明を置く。さて[もう一方には] 直観的な所見(anschauliches Befund)というものがあるとする。しかも、あの[上記の概念的]命題は、現実(Wirklichkeit)

を数学的に描出する試みの一環として、まさにこの直観的所見に対してあてがわれた表現（客観的か観念的か図式的のいずれであるかは問わない、wie auch immer <objektivierter>、<idealisierter>,<schematisierender> Ausdruck）という立ち位置を占めているとする。[そこで両者、すなわち概念的言明と直観的所見を比較してみようというのである]。　　　　　　たとえば、この鉛筆が或る持続(Dauer)においてずっと(beständig) 私の前にそして机の上にあったことを、私が見た(sehe)とする。この知覚(Wahrnehmung)は私に、＜或る持続においてこの鉛筆が机の上に置かれていた＞と申し立てる(Behauptung)権利を、もちろん絶対的権利とまでは言わないが、それでも筋の通った(vernünftig)しっかりした理由のある(gut begründet)権利を与える。　　　　さて、「一連の定義原理が拡張(Erweiterung)される」[前段を見よ]のに伴ってこの権利が揺らぐことがあり得るなどと思いなすのは、もちろん愚かである。それはまるで、ある瞬間に鉛筆がシリウスの近辺だかどこかにあって、我々の直観は[それまで]この時間瞬間を見落としていたのに、定義原理のこの度の[論理的]拡張によって、この時間瞬間が新たに[私の手持ちの時間瞬間に]編入されるようになったみたいな、そんな話が馬鹿げているのと同様である。実数の上を走破する(durchlaufen)変数によって(durch) 、時間連続体(Zeitkontinuum)が描出(darstellen)されるというのだから、[つまり時間連続体が主で実変数が従なのだから]、その実数概念を狭くとるか広くとるかは、[飽くまでも描出される]時間連続体によって決まるものだと思われる。実数概念を狭くとるか広くとるかという論点を、 [実数の] 一連の定義原理等々をめぐる[単なる]論理的(logisch)考量に委ねてはならない。

[2-6-d]　　　　{何が直観的連続体と数学的連続体の折り合いをつけるのか}
前段の実例では、[一方に]直観的に与えられた連続体を、[他方に]数概念をそれぞれ考えたうえで、両者に乖離(Diskrepanz)のあることを痛感したのだった。そこで今度は、どうすれば両者の繋がりをより良く理解できるかという問題に進もうと思う。　　　　そこで両者の関係の理解を深める目的で、議論の立脚点を現象的時間(phänomenale Zeit)に置いてみよう。[丁寧に言えば]、もっとも基本的な(fundamentalst)連続体と見込んで 時間(Zeit) に立脚点を置くのではあるが、同時に、直接的所与の領域に留まりたいという気持ちがあって、[時間は時間でも]客観的時間ならぬ現象的時間(phänomenale Zeit)に立脚点を置こうというのである。すなわち私は議論の立脚点を、私の意識体験の一貫した形式（durchgängige Form meiner Bewutseinserlebniss）に置く。　　　　まさにこの形式(Form)が、私の意識体験を私自身に対して現象(mir erscheinen lassen)せしめる。しかも一つの経過において継起するものとして(als in einem Ablauf aufeinanderfolgend)、それを私自身に対して現象せしめる。[訳者。＜私の意識体験を私自身に対して現象せしめる＞という表現は Fichte を想起させる]。（ちなみに体験(Erlebnis) とは、＜私が体験するままの(so wie)、その私が体験したもの＞のことである。

それは断じて、それに対応する現実的出来事((reale Vorgang)のことではない。すなわち、或る心的・身体的な個体に生じる現実的出来事ではなく、[つまり]現実世界に属す心的な、もしかすると生理的(physisch)な現実的出来事のことではない)。　　　　　[ところで]、そもそもの話として(einmal überhaupt)、[現象的時間と]数学的概念世界に渡り(Beziehung)がついていなければ話が始まらないというので、時間のなかに厳密な意味で点的な＜今＞(ein streng punktuelles Jetzt)を設定する可能性を、つまり時点たち(Zeitpunkte)の指定可能性(Anweisbarkeit)を、とりあえず(zunächst) 観念的可能性(ideelle Möglichleit))として[つまり飽くまでも一つの思考実験として] 認めることにしよう[訳者。この議論が暫定的であり、時点の指定可能性が[2-6-j]の 1.で最終的に棄却されることに注意せよ]。[さてそのとき]、どの二つの時点をとっても、かならず一方が先(früher)であり、他方が後(später)ではあろうし、A が先で、B が後であるような二つの時点については時間区間(Zeitstrecke)が決まるだろうし、 A より後で B より先であるすべての時点はこの時間区間に所属するだろうし、[また] 時間区間 AB を満たす(erfüllen)体験内容(Erlebnisgehalt)が、それ自体(an sich)別の体験に変じることなく、他の時間に移し替えられることもあり得ようし[時間の形式性・没内容性]、またこの体験が別の時間に移し替えられたときも、それが[新たに]充たす時間区間は[もとの]区間 AB と等しい(gleich)ということにもなるであろう。[訳者。以上があくまでも思考実験内での陳述であることに注意せよ]。　　　　　[現象的時間についての議論がするであろう]、時間的な「等しさ」についてのこの陳述には大いに疑問の余地があるが、私はそれに長居をするつもりはない。ただ次のことだけは認めてやってもよさそうである。二つの時間区間についての「両者は等しい」という申し立ては、［現象的時間に立脚する以上］時間直観(Zeitanschauung)に基礎をおく厳密な意味を有し、まさにこのことが測定(Messen)の可能性を保証するということ、このことだけは認めてやってもよさそうである。上述の、「時点」という基本カテゴリー、「A は B より先である」という二項関係、そして「AB は A'B' に等しい」という四項関係を基底(Fundamennt)とする形で、自然数とその基本関係 *F* を手がかり(Assoziation)に、数学的時間論(mathematische Zeitlehre)を構築する可能性が、見えたことは見えたのである。　　　　さて、[仮にだが]、私が先に触れた[直観的連続体と数概念の間の]あの乖離(Diskrepanz)をここで(nun) [つまり時点の指定可能性を容認するこの数学的時間論の枠内で]克服する見込みがあるとすれば [接続法、würde]、それは、「或る持続にわたって机の上に鉛筆があるのを、私は見た」という直観的所見(anschauliches Befund)の直接的な表現に対して、次の[二つの]仕方で[数学的な]解釈が施されるときに限られる。　　　　　すなわち[一つは]、1.「或る持続の間」という言葉を、「或る時間区間 OE に属すすべての時点において」という言葉で置き換えるやり方である。だがこの言葉はもちろん、起こっている直観的な何かを[言葉によって忠実に]再現しているのではなく、その言葉はただ、「そもそも時点たちへの分解(Auflösung)は正当な手続きである」ことを正当化する点に限って、効果的であるに過ぎない。[訳者。ゆえ

に 1 の解釈は乖離の解消には至らない]。　　　　しかしそうだとすると、[今度は]次のような解釈が成り立つ筈ではないかという話になる。2.　Pを或る時点とせよ。Pより先に時点Lが存在するとき、OL=λ・OE となるような時点Lが存在するというのなら、次のような有理数たちの領域(Bereich)[つまり実数]が存在することが真でなければならない、と。すなわち、P に[時間的に]先行する時点 L が、しかも[単位となる時間区間 OE について] OL=λ・OE となる時に限って、λがそれに属すような、そのような有理数たちの領域が純粋数論において、我々の一連の定義原理によって、算術的に構成できること、そしてまさにそれゆえに、我々の意味での実数になるということ、このことが真である筈ではないのか、と。さらに、このやり方で、時間区間 OE を単位として前提した場合、各点 P に対して特定の実数がその座標(Abszisse)として与えられるだけではなく、逆に(umgekehrt)、どの実数に対しても特定の時点があてがわれなければならない、と。[訳者、2 の立場は、＜時点の指定可能性と、実数の存在の 1:1 対応と理解できる。しかしこれもまた 1 とは異なる理由で、今から見るように廃棄される]。

[2-6-e]　　　　　　{直観と概念が媒介できそうにない・・・}

さて、「時点」、「先(früher)」、「同時(gleich)」という関係が純粋時間論の基底(Fundament)をなしているというのが本当(wirklich)なら、[時点その他が純粋時間論の基底をなす以上]、[前段の 2.で見た] 時点と実数の間にあの対応が存するか否かは、[またぞろ]時間直観(Zeitanschauung)の側の問題とならざるを得ない。[この場合、後述のように、数学的連続体との繋がりはうまく説明できそうにない]。　　　　　[しかし、それならと言うので]、求める対応が[そもそも]成り立たないとしたらどうなるか。[その場合は、直観から概念に眼を転じ、むしろ] 我々の一連の定義原理[の方]を拡張あるいは細工することによって、求める対応(Konkordanz)が生まれるように仕切り直す段取りとなるだろう。そしてそこまでやってもまだ巧くいかないというのなら、[それはもう端から]純粋に算術的な解析に存在意義などない(ohne wirklichem Wert)という話であって、我々は数論と連続体理論を互いに独立と見做し、ただ両者を併置[放置]するまでのことである。まあ、それはともかく(sei dem,wie ihm wolle)、[例の乖離の問題に復帰すれば]、「2.が主張する通りなのか ？ 」という問い、あるいは、それによく似た問い（たとえば、デデキントの切断原理は時点について[も]成り立つのかと言う問いとか、コーシーの収束原理についてはどうなのかという基本的な問い）に[だけ]は答えなければなるまい　　　ただし、そうした問題に対し、ああでもないこうでもないと言を弄する(drehen und wenden)のは御自由だが、[いついかなるときでも]集合（と列）の概念を手放すこと[だけ]はできない。しかもその集合概念をどの範囲に設定するかは、他でもない定義原理[の選び方]に依存するのである！

[2-6-f]　　　　　　{承前}

さて[私は二つ前の段落の 1.と 2.で、乖離の解消について現象的時間を当てにして思考実験まで試みたのだったが]、この期待は明らかにナンセンスだったようである。連続的な流れの本質についての先の問いに対して、我々が期待しているのは概念的な解決(begriffliche Aufklärung)なのに、[2.についてみたように]その問いに答えるのが依然として時間的直観だというのだから、それはナンセンスじゃないかと私は言いたいのである。或る人が或る問いに答えるように求められているとき、明らかに人違いでその人は問いを向けられているので、当人はその問いが理解できないで困惑している、みたいな話である。自然数のカテゴリーならまだしも、直観に与えられた限りでの連続体に、数学的分野の基底の役割を期待することはできない。そのための諸前提(Kap1.§1 参照)が満たされていないからである。そもそも、連続体に点を置く(dem Begriff des Punktes im Kontinuum)という発想は、それが数学的分野の基底となるためには、[連続体のなかに、この場合は]直観のなかに、発想の支持基盤(Stütze)が必要な筈なのに、それが[そこには]見当たらないのである。[思えば]、数学的な概念世界と、現象的時間の直接に体験された連続性(Kontinuität) —— 持続(la durée) —— とを隔てる、深い疎遠性(Fremdheit)を強調したことがベルクソン哲学の功績だったのである㉝。

[訳者。結局、この段落でワイルは時点(Zeitpunkte)の指定可能性に関して、1.の解釈は全面的に却下し、2.の解釈については懐疑的で、いわばペンディングにしている。彼はやがて、集合とその定義原理の再考に進む（あるいは実は「理性」に上訴する）という方途を選ぶ。デデキントの切断原理やコーシーの収束原理、そして中間値の定理ともどもにである。三つ後の段落以下を見よ]。

[2-6-g] {E・フッサールの時間論と並走する}

意識所与が（概念の論理的な有のように）端的な有(ein Sein schlechthin)として振る舞う(sich geben)のなら、 [つまり有であり、それ以上でも以下でもない有として振る舞うのなら]、話はそれで終わりである。しかしそうではなく、意識所与は＜持続し、しかも変化する＜今・有＞＞(ein fortdauerndes und sich wandelndes Jetzt-Sein)として振る舞うけれども、それはいったいどういうことなのだろうか。つまり私は、「今(jetzt)、これはある——しかし今、それはもうない」などと言うけれども、それはどういうことなのだろうか。 [たしかに] 私が反省を通じてこの流動(Strom)から自分を切り離し、また、変転する体験内容を包括する恒常的な＜今＞なるものを客観として自らに対置するならば、流動は我々にとって一つの経過(Ablauf)となり、我々はその中に点たちを置くこともできはするだろう。[この場合]、各点には特定の体験内容（Erlebnisganze）が対応し、意識が或る点に立てば、意識はそれに対応する体験内容を所有し、そしてその体験内容だけが<ある(ist)>と、そういう話になる。[ここまでは認めよう]。 だがその場合、個々の体験作用(Erleben)の具体的持続(konkrete Dauer)は いったい何に由来するのだろうか。[仮にだが]「互いに孤立した個々の点」という立場に固執する限り㉞、答えは一

つしかあるまい。いわく、「たしかに私はこの[特定の]時点の体験しか持っていませんが、この体験には（判明さは一様ではないとはいえ）記憶(Erinnerung)というものが含まれているのです。そして、私が過去の或る時点で持った体験が、この記憶の志向的対象(intentionaler Gegenstand)になっているのです」と。[こう説明する以外に手はない]。しかし、[今度は]この記憶の信頼性(Triftigkeit)が何に由来するのかという問いには誰も答えてくれない。例えば、短い持続を持つ光知覚(Lichtwahrnehmung)をした場合、私は或る瞬間 A においてこの知覚体験を持つだけではなく、同時に[つまり瞬間 A において]記憶たちを、つまりすべての過去の瞬間の知覚体験たちについての、その短い持続に含まれる記憶たちも持つ、という話である。そして人はこう言うだろう。「私はこの瞬間 A において、過去の短い瞬間 B における知覚体験を思い出すだけではなく、瞬間 B における全体験(gesamte Erlebnis)を思い出すのです。そしてこの全体験は、それはそれで、知覚以外に、すべてのそれに先行する瞬間において持たれた体験への記憶をうちに含んでいるのです。連続的知覚は、無限個の記憶たちの、互いに入れ子になった(geschachtelten)、そして互いに関係づけられた、無限個の系たちから成り立っているのです。＜先のもの（das Früher）＞とは＜入れ子にされたもの(das Eingeschachtelte)＞のことなのです」と。[人はそう言うだろう]。　　しかし、我々の体験作用が、そのようなものを一切含まないことは明白である。際限なく互いに入れ子になった点的な体験瞬間のこのような構造体が、閉じた統一として把握されるなどというのは背理(widersinnig)も甚だしい。[そもそも、いまの議論に含まれた]、＜経過は点たちからなり、[まさに]そうであるがゆえに経過は点たちに分割される＞という考え方が、明らかに間違っている。この考え方には、連続性を連続性たらしめる当のものもの、すなわち点から点への移行(Hinüberfließen)が見当たらないのである。恒常的に(beständig)持続する現在を恒常的に到来させ、また、それを消えゆく過去へと[恒常的に]追いやるもの、それがこの考え方には見当たらない。　　——では実情はどうなのか(Wie es in Wahrheit sich verhält)と問われれば、あなたはそれを各瞬間において直接に体験している(unmittelbar erleben)でしょうが、[としか答えようがない]。　現象的(phenomenal)時間をその掛け値なしの根源性(echte Ursprünglichkeit)において考慮すればわかることだが [訳者。この辺りから Weyl は E・フッサールの時間論を追尾する]、その直接的体験を記述(beschreiben)することなど不可能である。だからせいぜい以下のことしか言えない。私が意識のうちに有するものは、私にとって一個の「いま有る(Jetzt-seiendes)」のうちにあり、まさにそのようなものとして、その時間位置ともども去りゆくもの(Entgleitende)なのである。そしてそれはまさにそういう仕方で、恒常的に在るのだ(das beständig Daseiende)。すなわち持続し変転する常に新たなるもの(ein immer Neues)が、在るのだ。　　[さて]過ぎ去ったものが浮上する(auftauchen)ということがある。しかも私の新たな体験作用としてではなく、(確実な)記憶の内容として、過ぎ去ったものが浮上するということがある。そしてまさにそのことで[つまり浮上したことによって]、それは過去となっている(dann ward es das

Vergangene)。私が[自らの]生の過程(Lebensablauf)を、[或る]客観像(objective Bild)として自らの前に立てるとき、過ぎ去ったものは、いま有るもの(das,was jetzt da ist)との対置関係において、先なるもの(das Früher)なのである。　　　　そこから、客観的に表象された時間(die objektiv vorgestellte Zeit)について次のことが帰結する。1.この時間における個々の点は非独立的(unselbständig)である。つまり個々の[時]点は、それ自体では純然たる無(Nichts)であり、単に（数学的には当然まったく説明のできない）通過点(Durchgangspunkt)として存在する(existieren)。2.確定した時間点というものは、決してそれを[まさにそれとして]示すこと(aufweisen)ができず、どこまで行っても厳密確定ならぬ近似的確定(ein appropriatives Fixieren)だけが可能であり、しかもそれは時間の本質に根差すことであり、人間の持つ手段の偶然的不完全性によるのではない。同じことはすべての直観的に与えられた、特に空間的延長の連続体[のなかの点]にも妥当する。

[訳者。フッサールの時間論を取り上げた Weyl のこの議論、特に「通過点としての点」という議論は、本書の最後の§8 で「近傍(Umgebung)]」の概念に発展する]。

[2-6-h]　　　　{人間を数学的連続体に駆り立てる理性的動機}

人の心はどうして次のことでは充たされないのだろうか。人間の体験(Erleben)は[体験でありつつも] 現実世界の現実的出来事に届いてはいるし、人間の現象的時間は世界時間(kosmische Zeit)としてこの世界を[余す所なく]カバーしてはいる。加えて、単に[対象を]図式化することに止まらぬ[対象の]あらゆる制圧行為(in dem allen nicht bloß schematisierende Vergawaltigung)や、実践的な課題や目的のために考案されたあらゆる思考経済において明らかなことだが、人間は、所与である限り連続体が免れることができない不正確性(Inexaktheit)を顧みず、連続体に実数という厳密概念を充てがう(unterschieben)のに余念がない。だが人の心がそれ[だけ]では充たされないのはどうしてだろうか。[人の心が体験や実践的目的を超えて] 現実の背後に伏在する「ロゴス」の剔抉のために真正の理性(echteVernunft)を駆使するのは、いったいどんな理由があってのことだろうか。(たとえそれが、「自らの影を飛び越えることのできない」[人間]意識にお似合いの —— [せいぜい] 純粋な(rein)—— 理性であろうとも)。　　　　しかしここでこの問題を解明せよというのは無理な相談である。たしかに直観的連続体と数学的連続体が重なりあうことはない。両者の間には深い溝があるのだから。しかし世界を理解(begreifen)したいという努力の一環として、人間を直観的連続体から数学的連続体に駆り立てているのは、[飽くまでも]理性的な動機(vernünftige Motive)なのである。[たしかに]人間は、[人間自身の]経験作用によって構築される現実のなかに、まさに自然の一環として生存している。[しかし]自然研究を[まさに]この現実から、その現実の「背後(hinter)」に自らを隠す「真の客観的な」物理的世界に向けて、つまり厳密で無性質的な物理的世界に向けて駆り立てる理性的な動機があるのであって、たとえば、視覚物の色現

象の自然研究を、エーテルの振動やそれに対応する電磁場における数学的関数処理の研究に駆り立ててきたのもその理性的動機である。そして、人間を直観的連続体から数学的連続体へと駆り立てる[件の]理性的動機と、いま述べた物理的世界探求の理性的な動機は、実は同じもの(gleich)なのである。　　　　そうだとすると、我々が作り上げたあの解析という構造体(Aufbau)は、単なる論理的整合性(Folgerichtigkeit)に回収できないような、[むしろ]物理学理論(physische Theorie)に比すべき仕方で理性的に自己証明するような(vernünftig sich ausweisen)、そんなお望みとあらば<u>連続体のテオーリア(eine Theorie des Kontinuums)</u>と呼んで差し支えない何かを、内に含んでいることになる。その場合、実数の概念は、連続体の抽象的図式(Schema)となり、[連続体の]考え得る部分間の無限の相関(Ineinander)の図式となり、また関数の概念は、連続体が連続体自体を覆うときの(überdeckend)その依存関係(Abhängigkeit)の図式となるだろう（運動する点を例に引けば、線的空間的連続体が時間連続体を覆うこと（Überdeckung）について、そうしたことが現に起こっている。）　　　　私はここでこれ以上この問題を掘り下げることはしないが、次のことだけは言っておきたい（そのことは、その理由(wie)ともども、ここまでの議論から自ずから明らかではあるのだが)。すなわち、我々が理解した意味での実数概念と（連続）関数概念において前節の命題 A [中間値の定理]が成立する(gültig)ということが、まさに、上記のような理性的正当化(solche vernünftige Rechtfertigung)に際して決定的な役割を果たすのだ[つまり理性の導きによりつつ直観的連続体から数学的連続体へと移行するに当たって決定的な役割を果たすのだ]と、私はそう言っておきたいのである。ちなみに、物理的客観性の世界において「運動(Bewegung)」とは何であるかを厳密に理解するには､我々がここで打ち立てた実数と関数の概念が適している(geeignet)けれども、この適合性を担保(Beleg)するのがまさに前節の命題 A[中間値の定理]なのである。

[2-6-i]　　　　{論理学でなくテオーリア(theoria)へ}

[こうではない]。厳密な時点(exakte Zeitpunkt)が、与えられた持続の内部に、その分割不可能な究極的要素(letztes unteilbares Element)として置かれている(liegen)、というのではない。また、厳密な空間点が、与えられた延長(Ausbreitung)の内部に、その分割不可能な究極的要素として置かれている、というのでもない。　　　　そうではなくて[プラトン風に言えば]、件の所与を通じて(durch dies Gegebene) 洞見する理性(die hindurchgreifende Vernunft)こそが、[初めて]厳密な時点と厳密な空間点を[飽くまでも]理念(Ideen)として把握するのである。また[アリストテレス風に言えば]、時点と空間点が完璧な基底状態に向けて[初めて]結晶化し尽くす (kristallisieren aus) のも、算術的・解析的な実数概念にのっとって(an)、それも[理性の統制する]純然たる形式的[formal、形相的、エイドス的] テリトリー(Sphäre)に帰属する限りでの算術的・解析的な実数概念にのっとってのことである。 [ちなみに] 我々は[ここで]空間については直線の幾何学に話題を限定している！[ことをお忘れなく] 。　　　　さて[上の議論を踏まえるとき]、時間論

と空間論を独立した数学的・公理的な学問(selbständige mathematisch-axiomatische Wissenschaft)として打ち立てようとする者は、かならず以下の[段落の]事柄に留意しなければならない。[もし第一章と打って変わって、第二章§6 でいま新たに導入された、理性に立脚した連続体の「理論＝学問(Theorie＝Wissenschaft)」とその公理(Axiom)の視点に立とうというのなら]。

[2-6-j] {連続体理論の三つの公理}

1. 点を一つ一つ(einzeln)という仕方で指定すること(Aufweisung) はできない。このことは、点は個体(Individuen)ではない、したがって点は点の性質たちによって特徴づけることができない、と言い換えてもよい。(実数の「連続体」が個体たちだけで成り立つのと対照的に、[個体から成り立つのでない]時点と空間点の「連続体」は均質的(homogen) なのである。) それゆえ、点や点集合を絶対的な仕方で[ab=solut、他と切り離して] 確定(festlegen)することはできない。もしそれができるなら、それは、それが関数と看做せて、しかもそれが座標系(Koordinatensystem)に依存する限りでの話である。 (理性は、客観性(Objektivität)を旗印に、与えられた所与から幾何学的・物理学的世界を掴み取ろうとする。そのとき理性は自己無化(Ich-Vernichtung)という代償を払わざるを得ないが、座標系とは、この幾何学的・物理学的世界に残された、その自己無化の消すことの叶わぬ痕跡(das unvermeidliche Residuum)なのである。座標系は一つの道標(Wahrzeichen)である。そう、座標系とは、「存在(Dasein)は[それ自体として与えられるのではなく、飽くまでも]、意味を付与する(sinngebend)純粋自我(reines Ich)の意識体験の志向的対象(intentionaler Gegenstand)としてだけ与えられ、またそのようなものとしてだけ与えられ得る」ということを[今に] 語り継ぐ、この客観的テリトリーに残る朽ち果てた道標(letztes dürftiges Wahrzeichen)なのである。)

2. 連続性公理(Stetigkeitsaxiom)は[理性に立脚する時間と空間の学問においては]次のように定式化されなければならない。すなわち、単位幅 OE との関係において、各点 P に或る実数が座標として対応し、またその逆も言えるように、まさにそのように連続性公理は定式化されなければならない。この公理に従ってこそ、すべての配属完了判断は[上の] 1 の内容にも拘らず明確な意味を持つのである。([第一章の§2 では]、配属完了判断の構成に当たって原理 5 が排除されていたことに注意せよ。)

3. 純粋数論の構築を推し進めるなかで、本章[第二章]の§3 に至って我々がたどり着いた或る段階(Stufe)のことを思い起こそう。もしもこの段階で、純粋数論の基底(Fundament)を[自然数でない]新たな基底に差し替えたなら、すなわち、ちょうど[本章の] §2 で商(Brüche)についてそうしたように、自然数[という元々の基礎カテゴリー]に替えて、[今度は]実数を新たな基礎カテゴリーとして受け入れたなら、そのとき、この基盤

(Basis)の上に一つの学問的構築物(Gebäude)が打ち立てられたことだろう。暫時、それ[実数を基礎カテゴリーとする解析]を「超解析(Hyperanalysis)」と呼ぶ。　　　[さて]この超解析は決して我々の解析(Analysis)に一致しない。[いや]一致するどころか、たとえば[実数を考えるだけでも]、超解析のなかには解析に比べてより多数の実数が存在することになる。なぜなら、その[超解析の]集合たちを定義するに当たっては、「実数」との絡みで言えば、「存在する(es gibt)」がその定義に顔を出すような[新しい]集合たちが、そこに新規参入するからである。　　　したがって超解析では、一般的に(allgemein)と断っての話だが、コーシーの収束原理であれ、連続関数についての[一部の]命題であれ、妥当はしない。([正確に言えば] 初めから[通常の]解析に含まれていた関数や帰結に限って、コーシーの収束原理や[一部の]命題は[超解析で]妥当する。) そういうわけで、自然数という基本層(Grundschicht)よりも上位の圏層(Niveau)に逃げ込もう(Ausgang)という、[幾度、破綻しても] 性懲りもなく繰り返されるたくらみに、我々は倦むことなく反対しなければならない。連続体についての使用に耐える理論(eine brauchbare Theorie des Kontinuums)を提供する(liefern)のは、そして互いに重なり合う連続体たちの間に起こり得る依存関係についての使用に耐える理論を提供するのは、[実数を基礎カテゴリーに組み入れるような] 超解析ではなく、[それをしない、そしてコーシーの収束原理その他を排除しない] 解析の方なのである。　　　しかしそうだとすると、[2 の公理をめぐって今度は]こういう話が出てくる(Nun liegt die Sache aber so)。[実際、上の 2 で示した公理には超解析を許容する素地があって]、2 の公理によれば、一定の座標系 OE に立脚させる方式をとるとき(bei Grundlegung eines Koordinatensystems OE))、単に点たちと実数たちに対応があるにとどまらず、[一方で]点集合、点集合の集合、いや押し並べて空間論および時間論のすべての集合を考え、[他方では]超解析のすべての集合を考えたとき、そこにもあまねく対応関係(Korrespondenz)がある(bestehen)という話しになりかねない。正確に表現すれば、[2 で示した公理による限り]、超解析の集合たちと、空間論または時間論における OE の関数たちの間に対応があるという話しになりかねない。したがって件の公理[2]を、たとえばコーシーの収束原理や、幾何学の公理的構築でよく見かける類似の公理的構築物(axiomatische Aufbau)と同等に処遇すること(ersetzen)はできない (そしてそれがヒルベルトの完全性公理と同等に処遇することができないことは言うまでもない)。というのは、[なにしろ] 超解析ではコーシーの収束原理が[一般的には]妥当しないというのだから、[公理 2 に立脚する超解析と、コーシーの収束原理を許容する上の公理的構築物が、同様に扱える筈がないのである]。ところが[先行する直近の下線部で見たように]超解析はどうにも使えない代物(Unbrauchbarkeit)である[以上、結局、超解析からは手を引いて、[コーシーの収束原理を許容する] 公理的方法に目を向けざるを得ないのである]。　　　[しかし公理的方法に頼るとなると]、今度はまたこんな話が出てくる。すなわち、時間論と幾何学を、時間論は時間論で独立の公理的な学問として、また幾何学は幾何学で独立の公理的な学問として(als selbständige axiomatische

Wissenschaft betreiben)、ただし両者を一括して[(überhaupt)、同じ流儀で]　推進しようとすると、[それはそれで] 巧くいかない(nicht angehen)。[どう上手くいかないのかと言えば] 初等幾何学(elementare Geometrie)、つまり連続性公理抜きで成立する幾何学の方は、総合的に(synthetisch)構築することもできはするだろうが、しかし本来の意味での[狭い意味での]連続性幾何学(Kontinuitäts-Geometrie)はどこまでいっても解析的(analytisch)にしか処理できないからである。　　　　　[ここで連続性幾何学に固有の事情を説明すれば]こういうことがある。我々がどのようにして[連続性幾何学に、つまり]厳密[科学の]テリトリー(Sphäre)における曲線、面についての筋の通った概念に到達するのかといえば、 [まずは]純粋数輪の一部門として解析(Analysis)が展開され、解析のこの展開の後で(hernach)、座標概念に含まれた翻訳原理(Übertragungsprinzip)の助けを借りつつ、純粋数論の諸命題が幾何学的に運用されるのである。そうすることによって初めて、我々は連続性幾何学に到達するのだ。[そしてまさにここに初等幾何学と連続性幾何学の違いがある]。　　　　　[ただし初等幾何学と連続性幾何学は違うと言いながらも]、 本書の連続体の理論(Theorie)には[実は一貫して]次のような申し立て(Behauptung)が含まれている。すなわち空間部分であれ、空間部分を限界づける面であれ、その限界づける面のまた部分であれ、あるいは[さらに]それを限界づける線であれ、それらは[それぞれ]或るものの形象化(Gebilde von der Art,daß・・)だという申し立てが、それである。そこでその＜或るもの＞とは何かと言えば、それは、「いま枚挙したそれぞれに含まれている点たちの集まり(Gesamtheit)が、実数たちの三次元集合として、算術的に(aruthmetisch)構成可能であるその様(さま、Art)」のことである。[それは言い換えるとこういうことである。それぞれに含まれている点たちの集まり(Gesamtheit)が、実数たちの三次元集合として、算術的(arithmetisch)に構成可能である様、その様[自体]の形象化(Gebilde)が、いま枚挙したそれぞれの＜空間部分であれ、空間部分を限界づける面であれ・・・＞なのであると]。この申し立ては、「直線上のどの点にも或る実数が対応する」という申し立てと、実は似通った性質を持っている(von der gleichen Art)。[もちろん]先の主張も今の主張も、直接的な所与に照らす仕方では確証できないし反証もできない。しかしそれは、厳密な空間点(exakte Punkt)という想念(Konzeption)から出てくる筋の通った帰結ではある。[訳者。こうしてまさに上の意味合いにおいて、公理２が、つまり＜直線上のどの点にも或る実数が対応する＞という申し立てが、Weyl の理論に破綻なく組み込まれたことになる]。ではその場合、[公理的幾何学において] 幾何学的諸公理(die geometrischen Axiome) に課せられる役割は何だろうか。[解析の、つまり実数にかかわる、]或る関係(Relation)を[直観に] 直接与えられた関係と見立てる(ansehen)という仕方で、[上述の]翻訳原理(Übertragungsprinzip)を書き下すこと(formulieren)、それが幾何学的諸公理の役割である。

[訳者。Weyl はここで、「直観的連続体と数学的連続体の折り合い」という例の問題の解決のために、「翻

訳原理(Übertragungsprinzip)」という指導理念を最終的に提案したように見える]。

[2-6-k] {解析の現況}
現代の解析学は、直観から形式的概念および形式的原理に至る、その霧深い道の半ばをいまも彷徨っている。しかもそれでいて、集合概念や数概念が曖昧なのをよいことに、解析学はあたかも自らが集合や関数の形式的＝概念的な運用に長けた学問であるかのように振る舞っている。我々が到達した地点から解析学の現況を顧みれば、そのような批判は避けられない。 ただ次のこと[だけ]は認めなければならない。[解析の]基底(Fundament)をめぐるこの[手厳しい]批判は、[決して]現代解析学が成し遂げた個々の成果を貶めるものではない。少なくともその大部分を貶める言われはない。[たしかに]解析学の個別の成果にはまだ「大地の残した屑(Erdenrest)」が払拭されずこびり付いているけれども、それは、いったんあの「霧(Nebel)」が晴れればたちどころに雲散霧消する、そんな類の屑なのである。

[2-6-l] {小結}
たしかに(gewiß)本節の考察はいわば間に合せ(Surrogat)、つまり来るべき連続体の哲学のための、多少は役に立つかという程度の間に合せでしかない。それは連続体の哲学への踏み込んだ内容を含まないし、[そもそも]本節の課題が認識論ではなく数学分野に傾斜していたという事情もある。しかしこの議論はこれでよしとしよう。

§7 量と測り

[2-7-a] {翻訳原理}
先に「空間・時間」を「数」に結びつける翻訳原理(Übertragungsprinzip) に言及したけれども、いま少しこの翻訳原理に時間を割きたい。

[2-7-b] {時間区間たちは均質である}
或る「単一区間(Einheitsstreck)」 OE との関係において或る時点(Zeitpunkt) P を決める(festlegen)とはどういうことだろうか、しかも[直観ではなく] <u>概念を使って</u>(auf begriffliche Weise) 時点 P を決めるとはどういうことだろうか。これについて私は次のように考える。すなわちそれは、「より先(früher)」と「同じ(gleich)」という[二つの]原関係を置き、そこに（原理 5 を除く）一連の定義諸原理を投入しながら、次のような関係Λ(OEP)を――すなわち「二つの点、E とそれに先行する O に対して、関係Λ(OEP)を満た

す点Pが一つそしてただ一つだけ存在するという関係Λ(OEP)」を――構成することを謂う。　　　点たち O,E,P に関する上記の関係[Λ(ラムダ)]を、点たち O',E',P'もまた充すとき、「P と OE の比 (Vehältnis) は P'と O'E'の比に等しい」と言う（私はこれが比の概念の本来の意味であると思う。）　　　さてここで[逆に]次のことにも注意してほしい。すなわち[今度は]一つの(derselbe)点 P をとったとき、この P が[一方では]単一区間 OE に対して関係Λを有し、[他方では]単一区間 O'E'に対して関係Λ*を有していながら、 関係ΛとΛ*が、異なる3次元点集合に対応する異なる妥当外延(Geltungsumgang)を持つ[つまりΛとΛ*が異なる関係である]、ということは考えられない。どうしてかというと、もしそんなことが起こるとすれば、[前提より] Λ(OEP) とΛ*(O'E'P)がともに成り立つ以上、その上に点 P が確定される時間区間 OE は、 [たった]一つの区間集合(Streckenmenge)となりかねないからである（ただし一つの区間集合とは言っても、空集合と全体集合は排除する）。[ところがすべての時間区間が一つの区間集合に帰するというこの結論は馬鹿げている。だから上記の条件で、関係ΛとΛ*が[互いに]異なる[二つの]関係だなどということは起こらない]。　　　ただそうは言っても、[ちょうど]すべての時点たちが互いに本質を共有する(wesensgleich)[本質に区別がない、すなわち均質(homogen)であった]ように[2-6-j]、すべての時間区間たちの方も互いに本質を共有する[つまり本質に区別がない、すなわち均質である]ということはある。ただしその[本質を共有するということの]意味(Sinn)はこうである。すなわち、このような集合[つまり区間集合]は、[区間である以上]我々の演算圏域に含まれる派生的な二項的点関係(eine abgeleitete binäre Punktrelation)に対応する訳だが、[そもそも存在を担保する]呈示原理5（Aufweisungsprinzip 5）がここで排除されている以上、このような集合は[互いに区別されるものたちとして]存在してはない(nicht existieren)のである。[だからすべての時間区間は（一つの区間に帰することはないにせよ）均質ではある]。　　　[そうだとすると、区間という視点に立つとき]、連続性公理は次のような申し立ての姿をとるだろう。先に比（Verhältnis）と呼んだ上記の関係(Relation)Λはすべて、あるいは[むしろ]この関係の妥当外延はすべてと言うべきかもしれないが、それはすべて、実数によって一義的に表現されるし、逆に実数は実数でこの関係の妥当外延によって一義的に表現されうるのだ(umkehrbar-eindeutig repräsentiert werden können))、と。

[2-7-c]　　　{時点ではなく時間区間から出発する}

＜比＞をこう理解することは、量の計測に際して数が果たす役割を正しく理解する機縁となる。私は比の概念の理解の精度を上げるために、時点(Zeitpunkt)ではなく時間区間(Zeitstrecke)からの立論を試みるが、この[時間区間という]一般的な視点に立つことによって、ここまで展開してきた[数の}理論が、任意の正の線形な(linear) 量 [一般]の理論に変身するのである。議論の出発点を次のように設定する。

[2-7-d]　　　　　　　{時間区間の等しさ、加算規則、大小関係}

対象カテゴリーとしては時間区間[のカテゴリー]を選ぶ。原関係としては[まず]1)a=b.を立てる。時間区間のこの「等しさ(Gleichheit)」は、＜等しい＞に関する周知の諸公理を充たす（つまり、時間区間はその時間区間に等しく、a=b なら b=a であり、a=b かつ b=c なら a=c である）。この等しさを同一性(Identität)と混同してはならない。[さらに] 2) a+b=c. を立てる。なお三つの区間a,b,cを[それぞれ]それに等しい区間に置き換えても、この関係づけは成り立つ。a,b,c と a,b,c'についてこの関係が[ともに]成り立つなら、c=c'である。[さらに]加算は交換律と結合律を充たす。　　　——派生的関係の中でもっとも重要なのは、 a< b あるいは b＞a と表記される派生的関係であり、その意味は、a+d=b となるような区間 d が存在する(es gibt)ことである。異なる二つの時点があればかならず一方が先で他方が後であることを踏まえるならば、上の関係について次のような基本的事実(Grundtatsache)が認められる。すなわち、a<b,a=b, a>b という三つも可能性のうち、かならず一つそして一つだけが成り立つ、という基本的的事実が。

[2-7-e]　　　　　　　{測り(Maßzahl)}

いまから上記の基礎のうえに一つの学問分野(Disziplin)を構築する。しかも自然数への連想を手引きとしつつ、また第一章の基本諸命題に従いつつ、それを構築する。ただし呈示原理(Aufweisungsprinzip) 5 は徹頭徹尾排除する。　　　この場合、さらなる基本的事実(Grundtatsache)が参入するのであって、我々が念頭に置く演算野(Opereationsfeld)は均質(homogen)だという基本的事実がそれ、つまり(空集合と全体集合は別として)一次元的な区間集合は存在しないという基本的事実がそれである。したがって、個々の(einzeln)区間を絶対的に(absolut、他の区間と無関係に)決めること、つまり概念を使いその区間に対して特徴的な性質によって決める(festlegen)ことは不可能である。一つの区間はかならず他の区間との関係において（relativ)、つまり二項的な区間関係 R(a,b)に基づいてしか限定できない。　　　すぐわかるように、この区間をそれに等しい別の区間に置き換えても、a と b の間のこの関係は保存される㊲。　　　我々の理解する「比(Verhältnis)」や「比例(Proportion)」とは、次のような二項的な区間関係 R(a,b) に他ならない、すなわち任意の区間 a に対して、この関係の成り立つ一つの区間[b]が、しかも「[どれも]等しい」という意味でただ一つの区間 b が決まるような、そのような二項的な区間関係 R(a,b)に他ならない。　　　形式的・論理的視点を捨てて事物に即した視点(sachlicher Standpunkt)を採る限り、我々は等しい妥当外延を有する二つの比例は区別しない。つまり我々はどんな[二つの]比例でも、[それらが等しい妥当外延を有する限り]、それらに対応する[一つの]二次元的区間集合で置き換えることができる。この二次元的区間集合を比例の「測り(Maßzahl)」と呼ぼう。a,b がこの測りΛ [二次元的な区間集合Λ]の要素組(Elementensystem)であることを式で b＝aΛと表記し、言葉では「b は a に対して比Λを持つ」と言う。　　　そのとき次のことが成り立つ。二つの区間が互

いに、比Λを持ち、また比Λ*も持つなら、ΛとΛ*は一致する。なぜなら、もし一致しないなら、aΛ=aΛ*　であるような区間 a は、空集合でも全体集合でもない一次元の区間集合を形成することになるだろうからである。　　　　　　測りは掛け算と足し算ができ、この演算は以下の等式で定義される。すなわち　(aΛ)M=a(Λ・M);　(aΛ)+(aM)=a(Λ+M)

[訳者。M はギリシア語大文字のミュー]。

[2-7-f]　　　　　　　　　　　{アルキメデスの公理}

このようにして測り(Maßzahl)の自然な概念が得られたが、それ自体は純粋数論の扱う数とは無関係である。とはいえ、純粋数、とりわけ自然数が、測りを決めるための無くてはならぬ概念的な手段であることも間違いない。　　　　　――等しいという関係づけ a=b は一つの比例である。この比例の測りを 1 と表記する。すでに繰り返し説明したように、加算によって関係づけ b=na が生じる (n は任意の自然数)。この関係づけは比例である。自然数 n によって決まるその測りも n で表す。　　　　　　しかし逆の関係づけ a=nb あるいは b＝a/n　も比例である。それを言うためには、次のことを示さねばならない。或る区間に対して、1)一つの、そして、2)等しさと言う意味でただ一つの、a=nb となるような b が、存在すると。1)ゆえに a に冠された性質は、区間 nc に属す。しかし或る区間に属す性質は、均質性ゆえにすべての区間に共通しているのだから、1)の申し立てが成り立つ。2)の部分は、b<b'のとき、nb<nb'となることからわかる。　　　　――証明されたところによれば、或る二つの自然数 m と n をとるとき、方程式

b=ma/n

は m と n で決まる比例を表現するが、その測りは m/n＝αという商に依存するので、それ自体をαで表す。商に対応する測りの加法および乗法は、商自体の加法および乗法とパラレルに行われる。a と b が二つの区間だとすると、自然数 n が存在して na>b とすることができる、というアルキメデスの公理が成立する。ちなみにそれはより単純な事実に(auf einfacherer Tatsachen)還元することができない。["基本的事実"については 2-7-d を参照]。

[2-7-g]　　　　　　　　　　　{測りと実数の一致}

すでに見たように、二つの区間は相互にただ一つの比を結ぶ。では、どんな二つの区間も比を結ぶと言えるのか。連続性公理[2-6-j]に基づいて、この問いには「イエス」と答えるべきことがわかっている。ことの次第はこうである。　　　a と b を二つの区間とする。γa>b であるときに限ってγが属す商の領域（それは商の圏域における「開かれた残片」となるが)、この領域は純粋に算術的にも定義できる。つまりこの商領域は純粋な数論に所属するのであり、直接に理解可能な(ersichtlich)やり方で正の実数によって表示される。

逆にＩ[イオタ]を純粋数論における商の開かれた（空集合でも全体集合でもない）残片とすると、b=Ｉa（これは、Ｉに属すすべての商γに対して、そしてＩに属す商γに限って、γa>b であることを意味する）は一つの比例(Proportion)である。Ｉで決まる測りもＩで表そう。こうして、測りたちは正の実数たちに一致する(zusammenfallen)。二つの圏域(Gebiet)において加法と乗法は完全にパラレルに成立する。

[2-7-h] {結び}
本来は測りについて全面的な議論を展開すべきところではあったが、我々は「時間区間」という特定の(speziell)比例に絞って測りを説明したのである。だがこの限定された論のなかでも、測りがはらむ大方の問題点は語り尽くされている(erschöpft)。時間区間だけを取り上げたからといって、測りの説明に話題の拡散(Entfaltung)はいっさい生じておらず、それどころかそれは議論に指針を提供する理念(Idee)の役割をちゃんと果たしているのである。

[訳者。Weyl の原文は簡略に過ぎて真意を汲み取りにくいが、概ね上記の趣旨であろう。“Da mit diesen ganz speziellen Proportionen alle Maßzahlen bereits erschöpft sind,so kommt unsere allgemeine Auffassung dieses Begriffs bei der Durchführung der Theorie des Messens sozusagen gar nicht zur Entfaltung, sondern spielt lediglich die Rolle einer richtungsgebenden Idee.”]。

§8.道(Kurven)と面(Flächen)

[2-8-a] {面曲線(ebene Kurve)と空間面(Raumfläche)}
連続体研究を閉じるに当たって、「面曲線」と「空間面」という話題を取り上げよう。それは、幾何学的なイメージ(geometrische Vorstellung)の厳密化(exakte Fassung)において解析的概念(analysche Begriffe)がどんな役割を果たすのか、という[一般的問題の]個別研究にもなっている。

[訳者。「面曲線」は[2-8-b]で、「空間面」は[2-8-c]で個別に分析される。「2-8-d」以降は両者を共通の視点（近傍）から数学的に分析する]。

[2-8-b] {線(Linie)と道(Weg)の区別}
平面幾何学(ebene Geometrie)では、まったく異なる二つのイメージが「曲線(Kurve)」という[同じ]名前で呼ばれるという事態が起きている。[しかし]私は、[両者を一括して曲線

(Kurve)と呼ぶのは止めにして]「線(Linie)」と「道(Kurve)」という風に言葉を使い分けることで、両者の違いを詳にしようと思う。　　　　　ざっくりと言えば、前者(Linie=線)は街中の道路網または電車の路線に似ており、後者(Kurve＝道)は街の歩行者の歩み行く、またその歩みのなかで生まれ出る(in statu nascendi)、あるいは移動する電車が描き出す、そのような「道(Weg)」に似ている。「線」は喩えて言えば平面の圏域部分たち(Gebietsteilen)の境界(Begrenzungen)のようなもの、「道」は自ら動く点の軌道（die Bahn eines sich bewegenden Punktes）のようなものと言える。　　　[さて飽くまでも当座の思考実験としてだが] 平面を孤立した点たちに分解するなら、線(Linie)の方は、こうした点たちの或る性格を持った集合(als eine bestimmt geartete Menge)として理解されるだろう。いや [この「平面を孤立した点たちへと分解する」というくだりを] もっと正確に、「解析幾何学の一連の翻訳原理(Übertragungsprinzip)に従って、平面の点たちを実数のペア(Paar)[座標]たちとして表現すると」と読み換えると――そして我々が、[この翻訳つまり]ロゴスの全能性(die Allmacht des Logos)への信頼を堅持してさえおれば[つまりあらゆる領域にわたって言葉（ロゴス）が互換性を持つと信じるなら]――線(Linie)は、実数の或る二項関係（陰伏的な方程式）に対応する実数の二重集合として(als)、ただし純粋数論の姿をとったそれとして理解されるだろう。　　　{さて}この場合、平面上を動く点が「通過する(passiert)」、平面の点たちのその集まり(Gesammtheit)は上の意味での線(Linie)をなす、というのはたしかにその通りである(richtig)。ただ[この場合]、我々はこの線(Linie) と区別して、この[運動する]点の道を考えないではいられない。つまり、運動の「軌跡(Spur)」あるいは「轍(Geleise,ワダチ)」とも呼ぶべき線(Linie)と区別して 、道(Weg)を考えないではいられない。[なぜなら例えば] 貨物車は、進むべき路線(Geleise、轍)[つまり線]が指定されている場合でさえ、操車の仕方しだいでは、さまざまな道(Weg)を、そしてさまざまな距離の道(Weg)を通るものだからである。[すなわち]「道(Kurve)」とは、[線で決まるものではなく]本質的には一つの運動(Bewegung)に即して(an)初めて(nur)――しかもその運動の抽象的な（付随的な）契機として初めて――読み取られる何かなのである。　　　　ところがその運動を厳密に(exakt)表現しようとすれば、[そもそも]動点の位置(Ort)は純粋に算術的に構成された二つの関数によって表示されるうえに、その位置も時間に依存するわけだから、[結局] 動点の位置(Ort)は、一つの実数パラメーターを持つ、二つの関数によって表示されなければならない。つまり、パラメーターの値は時点(Zeitpunkt)に対応し、[そのパラメーターに対応する]位置の第一座標と第二座標が関数値に対応しなければならない（パラメーター表示というもの）。我々がここで話題にしているのは、まさに無限小幾何学(Infinitesimalgeometrie)で[かねてより]話題にされてきた、この本来的意味での道概念なのである。　　　　――道とはそもそも「軌道点(Bahnpunkt)」たちの一次元連続体(eindimensionales Kontinuum)なのである。[その趣旨はこうである]。どの軌道点であれ或る場所(Stelle)において在る(sich befinden)というのはその通りだし、どの軌道点であれ平面の或る特定の点に重なる(koinzidiert)というの

もその通りである。しかしそれでも、一つ一つ(selbst)の軌道点が平面の一つ一つの点である(sein)わけではない。[むしろ] 軌道点は運動の＜中途段階(Stadium)＞なのであって、[それは端的な意味での点ではなく]、[むしろ]時点(Zeitpunkt)と完全に類比的な仕方で(analog)、「先」と「後」という相互関係のうちに置かれた点なのである[訳者。[2-6-g]の＜通過点＞を参照せよ]。つまり、運動というやり方で、軌道点たちの連続体は、時点たちの連続体を連続かつ単調な仕方で覆う(in der Bewegung überdeckt das Kontinuum der Bahnpunkte in stetiger monotoner Weise das Kontinuun der Zeitpunkte)。だがこの見方こそ[さらに]、道(Weg)を、それを産出する運動からいわば切り離す可能性を保証する当のものなのである(Durch diese Auffassung gelingt es, den Weg von der Bewegung, die ihn erzeugt, gewissermaßen ablösen)。 [以上は二次元平面内での道(Kurve)についての話だったが]、このやり方は三次元空間内での道(Kurve)にも応用できる。それはとりわけ「面(Fläche)」概念の定義において重要であるが、この分野は難易度が高いので全面的に数学的に処理することにしたい。

[訳者。段落末尾の「だが」で始まる文が難解である。そこに至る議論の流れはこうだろう。まず、(A)「軌道点は運動の＜中途段階(Stadium)＞なのであって、[それは端的な意味での点ではなく]、時点(Zeitpunkt)と完全に類比的な仕方で(analog)、「先」と「後」という相互関係のうちに置かれた点なのである」と振り（軌道と時間が同じ構造を持つという指摘）、それを(B)「運動というやり方で、軌道点たちの連続体は、時点たちの連続体を、連続かつ単調な仕方で、覆っている」という言葉で追認したうえで、(C)「だがこの見方は、道を、それを産出する運動からいわば切り離す可能性を保証するものである」と結んでいる。(C)が難解だが、Weyl は「道（軌道点たち）」をまず「運動」に重ね、それをさらに「時間（時点）」にも重ねることによって、そこから大きく反転して(C)、その「道」が運動でもなく時間でもない、そして運動よりも時間よりも深い第三の何かに基礎を置くという認識を（いささかぶっきらぼうに）表明しているのであろう。

この第三の何かが「近傍(Umgebung)」であることは、[2-8-c]以降の論述から知られる]。

[2-8-c] {面点(Flächenpunkt)と面自体(Fläche an sich)の区別}

[次に、三次元空間内で] 面（Fläche）を考えるときも、[前段の二次元空間でそうしたように]、「線(Linie)」との類比ではなく「道(Kurve)」[＝Weg]との類比で考えることが重要である。つまり無限小幾何学でパラメーター表示によって表現される意味での面概念(Flächenbegriff)が[ここでも]重要な役割を果たす。 私の主張はこうである。どこから見ても徹底的で包括的な仕方で面概念を定義(Definition)したいのなら、その面は「面点たち(Flächenpunkte)」から成る(bestehen)と考えるべきであり、それ以外の方針は考えられない。ちなみに私は、面点(Flächenpunkte) [という矛盾を孕んだ言葉]に、[いやしくも、それなしでは]二重に拡がった連続体(die ein zweifach ausgebreitetes Kontinuum)というものが形成(bilden)されない、つまり[いやしくもそれなしでは]面自体

(Fläche an sich)が形成されない、そのような面に固有のエレメントたち(Elemente sui generis)という意味を込めている。　　　　ところで[他方では]、この[面点という名の]面(Fläche)たちは同時に空間(Raum)に埋め込まれており(eingebettet)、それゆえに(damit)、どの面点にも、それが置かれた空間位置(Raumstelle)を通じて、或る空間点が相応する(korrespondieren)。[それを] 通常のパラメーター表記、

(9).　$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$.　$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$.　$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$　　　　に即して見ると、デカルト座標として空間点を表示する三つの実数 x,y,z があり、ガウス座標として面点を表示する数 u,v があり、しかも上記の関数たちが前記の相応関係を[つまり、面たちは同時に空間に埋め込まれており、それゆえ、どの面点にも、それが置かれた空間位置を通じて、或る空間点が相応する、という相応関係を] 数学的に定めるのである。　　　　しかし周知のように、[単に] 数のペアで面点を表示するというのでは、一般性の観点からして、すべての面をその連関関係において<大域的に(im Größen)>表示するには不十分である。そこで数学的定式化に進むに際して、[くだんの]「面自体」(Fläche an sich)を、[一方では]何らかの特定のカテゴリーの対象たちの集合 $\mathfrak{F}$ でありながら、すなわち、面点たちを要素とする集合 $\mathfrak{F}$ でありながら、[他方では同時に]（純粋数論に登場する）集合でもあるようなもので置き換えようというのである。そしてこの集合の要素たちが面点たちだ[という話の流れ]である。――座標概念を使って、空間点を実数の三つ組みに移し替えたのに倣って、[今度は]、面点たちの間の関係づけを使って、面点たちを純粋解析のこれらの諸対象に移し替えよう(hinüberführen)という寸法である。ただこの[移し替えを司る]「翻訳原理」は[ここではまだ]未解明なのだが――。[訳者。要するに Weyl はここで近傍に計量（純粋数論）を持ち込もうとしている]。　　　　さて、これらの[面]点たちを二次元的な面(Fläche)に向けて糾合する(einen)、そのような[面]点たちの連続的連関(stetige Zusammenhang)とはどのようなものだろうか？　[そう言えば]、我々は連続体を孤立した点たちに分裂させておいたのだった[2-8-b]。そのため我々は、個々の点の相互依存性に起因する[筈の面点たちの]この連関を、後から(nachträglich)、それと概念上等価な何かで置き換える羽目になるわけだが、それはなかなか容易ではない。そういうわけで私は[むしろ]、[1913 年の]著作『リーマン面の概念』の位置解析部門(Analysis-situs-Theil)でとったのと本質的に同じ手法を[ここで] 採ろうと思う[38]。

[訳者。$\mathfrak{F}$　は F のフラクウール。]

[2-8-d]　　　　{ 面点(面以前) → 近傍 → 面自体（面以後）}

時間連続体において、各々の点は「通過点(Durchgangspunkt)」として存在している。しかしこの事実にも拘らず、我々は点を独立した個体（Individuum）として、すなわち実数aとして処遇する。そこで[実数を個体として許容するこの]解析学の内部で、＜時間連続体において各々の点は通過点としてのみ存在する＞という事実を[敢えて]正当化しよ

うと思えば、点を、不等式 ｜𝔵—𝔞 < 1/n｜ (n=1,2,3…)で定まる、絶えず狭まりながら、𝔞へと縮合する近傍たちの無限の列との関係で (relativ zu der unendlichen Folge seiner durch die Ungleichungen ｜x—𝔞 < 1/n｜ (n=1,2,3…) definierten, sich immer enger um a zusammenziehenden Umgebungen)考察することになる。
[そういえば] 連続関数の連続性の定義のなかで、[近傍の無限列への]このような転換(Ersatz)が利用されていることは特記に値する。前近代の解析は、点が互いに依存関係にある(Unselbständigkeit)という事実に対して、「無限に近い(Unendlichnahe)」という概念を使ってアプローチを試みたのだったが（そのやり方は矛盾なしとしない)、[対して]近代の解析は、「無限に近い」という概念を＜絶えず狭まる近傍の列＞に差し替えるという手法を取らないではいられなかったのである。　　　そこでそれを踏まえてこう定義する。面点たち（Flächenpunkte）において特徴的な性質(Eigenschaft)を通じて、その面点たちを要素(Elemente)とするような或る集合 𝔉 が(純粋数論の枠内で)与えられて(gegeben)おり、それに加えて(dazu)、言葉(Worte)でなら「Q は P の n 番目の近傍のなかに在る(liegt in)」と表現されるような内容が、二つの面点 P,Q と自然数 n を含む関係(Relation) U(P,Q;n)で与えられているのなら —— それをもって「面自体(Fläche an sich)」が与えられたとするのである。なおこの関係については、以下の[一連の]要請(Aufforderungen)を行う。

[2-8-e]　　　　　　　　　　{三つの要請}

1)　P は、P のすべての近傍の内部にある(liegen in) 。P の n+1 番目の近傍は P の n 番目の近傍の部分(Theil)である。[以上が要請の 1]。
[そもそも性質(Eigenschaft)に集合(Menge)が対応するという[1-4-b の]原則に準拠すれば]、空所 𝔲を持つ「 𝔲は実数である」という性質 R(𝔲)には、すべての実数の集合(Menge)が相応するが、この集合は数論では一次元連続体の類型(Typus)として機能する。また二つの空所 𝔲と𝔳を持つ二項的な関係 R(𝔲)・R(𝔳) には、同様の[つまり実数の]二重集合が対応(entsprechen)するが、それ——いわゆる「数平面(Zahlenebene)」——は二次元多様体の類型として機能する。だがそうだとすれば(daher) [近傍もまた類型(Typus)を持つと見込んで]、「どんな近傍でも、連続写像により、上の数平面上の単一正方形 (｜𝔲｜< 1, ｜𝔳｜< 1)の内部に移せる、と考えることにしよう(verlangen) [つまりこの正方形を近傍の類型にするという方針を採ることにしよう]。なおこの場合、[近傍が写像で決まるだけでなく逆に]「連続写像」それ自体も近傍の概念で決まることにも注意されたい。こうしたことを踏まえると、この要請[1]は次のような仕方で[さらに]厳密に定式化される。[訳者。近傍に対する正方形以外の「類型」の可能性については[2-8-g]を参照のこと]。

2) P_0を面点とすると、互いに逆の関係にある(zunander inverse)[一対の]連続関数

$P=P(\mathfrak{u}\,\mathfrak{v})\mid \mathfrak{u} = \mathfrak{u}\,(P),\ \mathfrak{v}=\mathfrak{v}\,(P)$、　　なお $\{ P\,(00)=P_0\}$

が存在し、しかも P_0 の一番目の近傍 $\mathfrak{U}$ と、数平面の単一正方形 K の内部を、可逆にして一意的な(umkehrbar-eibdeutig)写像が媒介する。―― [なお] 関数 P($\mathfrak{u}$ $\mathfrak{v}$)が連続であるとは、n を任意の自然数、また $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ を単一正方形内の点とするとき、分数 α が存在して、条件 $|\mathfrak{u}'—\mathfrak{u}|<\alpha$, $|\mathfrak{v}'—\mathfrak{v}|<\alpha$ を充すすべての実数 $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$ に対して、P($\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$) が P($\mathfrak{u}$ $\mathfrak{v}$)の n 番目の近傍にあることを謂う。また関数 $\mathfrak{u}$(P) が連続であるとは、$\mathfrak{U}$ のすべての点とすべての分数 α に対して、次のような自然数 n があって、P の n 番目の近傍に属す点 P'は必ず $\mathfrak{U}$ にあり、しかも条件 $|\mathfrak{u}(P') — \mathfrak{u}(P)|<\alpha$ を充すことを謂う。同じことは $\mathfrak{v}$ (P)にもいえる。[以上が要請の 2]。
今話題にしている面(Fläche)の上の連続関数についての[これら一連の]命題を、§5 で一実変数の関数についてしたのと同じ仕方で[多変数についても]基礎づけるには、さらに次の前提が必要である。すなわち

3)一つまたは複数の、自然数のカテゴリーに関係づけられた変数たち (λ と表記しよう)、の関数 P(λ)で、しかも、すべての変数に対して P(λ)が面点であるような、そんな関数 P(λ)が存在する。そして[逆に]どの面点 P(λ)とどの自然数 n に対しても、「或る λ が存在して、この λ に対して、P(λ)が P の n 番目の近傍にあるような、そのような λ が存在する。（しかも P(λ)の値は面上で、至る所＜稠密＞に存在する。）[以上が要請の 3]。
　念のために言い添えるが、その場合、$\mathfrak{F}$ は一次元の集合とは限らず、多次元集合であっても差し支えない。記号 P は複数の空所を引きつれる形になるが、それでもここに説いた内容は意味を失わない。

[2-8-f]　　　　　　　　　　{空間面}
　[残るは]、「面自体(Fläche an sich)」から「空間面 (Raumfläche)」に至る道筋である。道筋は以下の通りである。すべての P に対して実数値をとり連続でもあるような、（純粋に算術的に定義された）三つの関数 $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}$ (P), $\mathfrak{y}=\mathfrak{y}$(P), $\mathfrak{z}= \mathfrak{z}$(P) を通じて、すべての面点 P に対し空間 (Raum) におけるその位置(Stelle)が指定され、そのことによって $\mathfrak{F}$ が空間内に埋め込まれるのである。或る点の近傍に限って考察するなら、つまり（よくある言い方をすれば）面を「局所的に(im Kleinen)」考察するなら、上の制約 2)によって、[2-8-c の](9)の形をしたお馴染みの面の連続的パラメーター表示がすぐ導かれる。

[2-8-g]　　　　　　　　　　{議論の恣意性}
連続的な連関を近傍概念に帰着させるに当たって一つ不具合がある。関係 U(P,Q;n)によって n 番目の近傍を決めるとき、連続的連関の[連続的という]内容自体を大きく逸脱した出来事が起こってしまうのである。たとえば平面の場合、点の n 番目の近傍として、その点の周りの半径 1/n の円の内部を選ぶことができるが、しかし半径 $1/2^n$ の円を考えることもできるし、円形ではなく楕円形や正方形やその他の形をした近傍を使うこともできる。

我々はこのような恣意性を（面点を描くときの対象の恣意性ともども）背負っているのである。その理由は明らかに、「所与のもの(das Gegebene)と数学的なもの（das Mathematische）の間に、どのようにして明晰な仕方で紐帯(Band)を置くべきか」という問いに対して、いまだに明快な解答が見出されていない点にある。(真の連続体と孤立したエレメントたちの集合の間の、[例の]廃棄困難な乖離がこんな所でまたぞろ(immer wieder)お出ましという次第)。 最後に、二つの解析的な空間面が重なる（sich in Deckung befinden）ための条件を言い添えておこう。つまり二つの解析的な空間面が、直観的な意味では同じ[一つの]空間面のための、[解析的には異なる二つの]表現（Repräsentation）となっているための条件はこうである。

[2-8-h] {承前}

一方に関数 $\mathfrak{x}(P)$, $\mathfrak{y}(p)$, $\mathfrak{z}(P)$ を通じて空間に埋め込まれた面 $\mathfrak{F}$ が与えられおり、他方に関数 $\mathfrak{x}^*(P^*)$, $\mathfrak{y}^*(p^*)$, $\mathfrak{z}^*(P^*)$ によって空間におけるその位置を得た点たちの面 $\mathfrak{F}^*$ があるとする。さらに互いに逆の二つの連続関数㊳

(10). $P^*=F^*(P)$, $P=f(P^*)$

があって、それは二つの集合 $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}^*$ の相互の可逆にして一意的な写像であって、しかも(10)で結びつく二つの点 P と P^*について、常に、

$\mathfrak{x}(P)=\mathfrak{x}^*(P^*)$, $\mathfrak{y}(P)=\mathfrak{y}^*(P^*)$, $\mathfrak{z}(P)=\mathfrak{z}^*(P^*)$

が成り立つことを謂う。そのとき、「二つの＜空間における面＞は変換（Transformation）(10)によって重なる（in Deckung）と言われる。

[2-8-i] {カントへのオマージュ？}

ここで理論展開を切り上げることにする。我々が提示した一連の原理が、その上に解析学を遺漏なく構築する任に耐えるものであることは確認できたし、また解析の第一段階に限ってとはいえ、この構築を実行してみせたのもご覧の通りである（[前書きで告知した]ピタゴラス問題を十分理解するのに十分と思われる程度には)。 実数概念の厳密な定義に必要な論理的(logisch)原理について、それに[いちいち]対応するものが連続体の直観(Anschauung)のなかに見当たらないではないかという異議に対しては、直観的連続体の中に見出されるものと数学的概念世界は、互いにあまりにも異質であるために、両者が合致するという要請（Forderung des Sich-Decken）は浅はかな求めとして却下せざるを得ないと答えるのみである。このことは[本文で]縷々説明した。 [ただし]それにもかかわらず、数学は我々に一連の抽象的な図式(abstrakte Schemata)を提供しているの

であって、[一つどころではない]複数の連続体が交錯する対象圏域において厳密な学問の達成を企てる限り、人はこうした抽象的図式なしで済ますわけにはいかない[というのもまた事実である]。

[訳者。この結びはカントの図式(Schema)概念を想起させる。直観(Anschauung)とカテゴリー(Kategorie)を媒介する第三者(das Dritte)]。

[完]

原注

① [1-1-b] 大部分の言葉が不正確(inexakt)であること、その外延が流動的(fließend)であること、しかもそれが言葉の本質に由来し言語の欠陥とは言えないこと、こうした事柄を論理学者はともすれば失念しがちである。フッサールの「イデーン」を参照せよ。136ff. なお数学は正確な存在(exakten Wesen)にのみ関わる。

② [1-1-c] 言葉記号(Wortsymbol)でない記号を想定すれば、もしかすると空所の配置についてのこんな気遣いは不必要だったかもしれない。たとえば関係の判断図式を、空所たちに対応する楔釘たちの打たれた木製の板だと思ってみよ、また対象たちを、穴の空いた小球でその穴に[さっきの]釘がはまるようにできていると思ってみよ（これが空所の充填に当たる)。これだって言葉に劣らず立派に使える記号じゃないか。—— 我々がギリシア人の習慣に逆らって 1 を数に含めたように、性質だって同じやり方で<u>関係</u>として（つまりその判断図式がただ一つの空所しか持たない関係として）カウントできる通りだ。

③ [1-1-d] 我々が何らかの手段によってこの問いに決定を下すことができるかどうか、ここではそれは別問題である。

④ [1-2-a] これら一連の原理は後で番号を添えて太字で引用する。

⑤ [1-2-b] ここに列挙した一連の判断図式は、それ自体は「命題(Satz)」でしかない。[しかし]「これらの命題がいずれも意味を持ち判断(Urteil)を言明するということ(daß)」、このことの正確な言い直しが(in präziser Fassung)、まさに§1 の結びで触れた、「それ自体存在する対象たちの閉じた系(geschlossene System an sich existierender Gegenstände)」なのである。

⑥ [1-3-a] ここから先、「判断」という言葉は本来の意味でのみ使用し、空所を含む判断図式には使わない。

⑦ [1-3-a-2] 構成に当たってそもそも(überhaupt)原理 6 が適用されてない判断も、特殊判断に含めるという手もある。その場合は、「特殊」判断と「一般」判断のほかに、複合的な「一般 - 特殊」判断があることになる。

⑧　[1-3-b]　少なくとも私はそう思うという趣旨であって、他の見解を抱く人がいることを妨げない。

⑨　[1-3-b-2]　「直観的」等質性とこの「概念的」等質性の関係には立ち入らない。

⑩　[1-3-e]　デデキントの有名な著作、『数とは何か』はこう切り出す。「学問では、証明可能(beweisbar)なことを証明なしで信じて(glauben)はならない」（初版前書き）。確かにこの思考法は大半の数学者において顕著であるけれども、それは原理としては転倒している。あたかもそれは、証明という名の間接的な根拠連関(mittelbarer Begründungszusammenhang)が或る「信(Glaube)」をもたらすと、しかも一歩一歩の歩みの正しさを直接的な洞見において確認することなしに証明はこの「信」をもたらすと、そう言わんばかりである。[しかしそうではなくて] 証明ならぬ洞見こそが、常に、認識の究極の法源(Rechtsquelle)、それこそが「真理体験（Erlebnis der Wahrheit）なのである。数学以外の学問、たとえば哲学において定義や演繹を求める数学的スタイルを押し通そうとする数学者は、数には生命がないという理由で数を拒否する動物学者と[一見、逆のようだが実は]同じ愚を犯している。

⑪　[1-4-j]　もちろん、数学的思考に対してデデキントの書物が有する大きな歴史的意義を貶める意図はない。

⑫　[1-6-c]　「狭い手続き」の原理的な意義は、次の点に目配りすれば極めて明らかである。狭い手続きに従えばこそ、基本カテゴリーの対象たち[だけ]が我々の研究の真の意味で客体であり続けるのであって、もしこの手続きに従わないなら、あまたの派生的性質と派生的関係とが、本源的対象の国に肩を並べて、認識客観として振る舞うことになるだろう。定限的判断、すなわち狭い手続きという制約の下で構築された判断では、その[真偽の]決定にはこの基本対象たちの通覧しか必要としないが、超限的判断では、それに加えて、すべての派生的な性質と関係の完全な通覧を必要とするのである

⑬　[1-6-d]　第２章では数概念の構成がさらに詳細かつ体系的に推進される。

⑭　[1-6-d-2]　ここで私が言う自然数とは、有理数[のカテゴリー]に含まれたカテゴリーとしての自然数ではなく、独立の(eigne)カテゴリーとしての自然数である。

⑮　[1-6-f]　学問に「命令(Gebote)」は存在(es gibt)しない。存在するのは「法則（Gesetze）」だけである。だがそうだとすると、まさにこの[直近の]言い方についても(So soll den auch hier)、たとえば(etwa) [私（Weyl）のやり方に逆らって]、「存在する(es gibt)」という名辞を基本カテゴリーに所属しない対象に結びつけて使う人がいても、それを「禁じる(verboten)」術はないことになる。言うまでもなく(natürlich)、どんなやり方でも採るのは可能だし許されている。どうぞ、そうなさいませ、循環に陥らないようにして、そうなさいませ。

⑯　[1-7-b]　U=Φ（xyz）と表現された関係を、x,y,z と U の間に設定せぬこと。やっとの思いで抜け出した循環にまた陥らぬために。§8 を参照。

⑰　[1-7-g]　明らかに、デデキントの無限の定義（集合と真部分の一致）は私の立場では問題にならない。

⑱　[1-7-g-2]　いずれにせよこの立場は「論理的(logisch)」には完全に成り立つ。ただ認識論的に見て、個数概念の方が[順序数概念よりも]原初的ではないか、個数概念は順序数概念から独立なのではないか、といった問題はあるが、この問題はここでは扱わない。

⑲　[1-8-a]　この文脈では、集合が果たす役割は次のことに限られている。[すなわち]対象間の関係も

それはそれで対象であるという点に対処するため、そして[こうして生まれた]対象間にまたぞろ新たな関係が成り立つという点に対処するため、これらの点に対応するために集合は使われている。

⑳ [1-8-j] この集合が基本カテゴリーの要素から成り立っていないときに。

㉑ [1-8-k] 私の知る限り、最初に、そしてのちの誰よりも明晰にこの定義原理を提起したのはフレーゲ（『算術の基礎(Grundlagen der Arithmetik、§§63-68)である。彼は、数学全体に対してこの定義方式が有する大きな意義を十分に認識していた。

㉒ [1-8-n] たとえば､｢タイプ(Type)の理論に立脚する数学的論理学(Mathematical Logic as based on the Theory of Types) 」、アメリカ数学雑誌、vol.XXX。あるいはラッセルとホワイトヘッドのPrincipia Mathematica,vol.I.(Cambridge,University Press)

㉓ [1-8-n-2] Les mathematique et la logique,Revue de Metaphysique et de Morale,t.13,14; Reglexions sur les deux notes precedents,Acta Mathematica,Bd.32,S.198-200.

㉔ [1-8-o] Mathematische Annalen,Bd.65: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.

㉕ [1-8-o-2] Mathematisch-Natürlwissenschaftlichen Blätter の 7 に載った、私の教授資格論文、『数学的基礎概念の定義』を参照。

㉖ [1-8-o-3] そして当然､Zermelo が Acta Mathematica,Bd.32,S.185ff で展開した有限集合の理論にも対抗して。

㉗ [2-1-a] Dedekind｡『数とは何か(Was sind und was sollen die Zahlen?)』。§§7,11,12.

㉘ [2-2-j] ここでも、そしてここから先でも､｢集合(Menge)｣という言葉は｢定限的(finit)｣集合の意味に限って使用する。第 1 章§8 を参照。

㉙ [2-2-k] 分数が負数より先に登場したことは、単なる歴史的偶然とは思えない。我々が示したあの体系的展開がこの歴史的な歩みに対応するからである｡つまり（整数を超えて(über)有理数に出会うのではなく）分数を超えて有理数に出会うという体系的展開。

㉚ [2-4-a] 昨今、無限個数の変数 f(1),f(2),f(3),・・・を有する関数が話題になるが、それは（この場合）比喩的な物言いにとどまる。

㉛ [2-5-b] 第 1 章の§2 で関係の表記にこれを既に具体的に使用しているのに、それをここで繰り返す理由は、定義づけの式の右辺のαとβが（正の実数ではなく）そもそも分数と想定されていることに注意を促すためである。

㉜ [2-6-b] もちろんこういうことがある(freirich)｡解析に登場する連続関数のなかに、この問いが[どこまで行っても]開かれた問いであり続ける､[そんな]連続関数があるわけではない｡関数から見れば(für sie)、この関数の連続性の申し立てに含まれる[2-5-b 冒頭の]否定的存在判断は、定義諸原理を集合に関する肯定的な存在判断に書き換えたとき得られる「公理」の論理的帰結に他ならない。ところがそれはまさに、この｢[定義諸原理にのみ立脚するという意味で]無制約的な(unbedingt)｣連続関数の､[それでも]特定の性質(besondere Eigenschaft)なのである。

㉝ [2-6-f] たとえば彼の『創造的進化』(ドイツ語訳あり)の最初の数頁を参照｡Jena,Diederichs,1912.

㉞ [2-6-g] 次のことを失念しないように。たとえば整数の実数たちにおいて要素たちは互いに孤立し

ているが(isoliert gegeneinander)、実数たちの「連続体」においても、個々の要素は実際に(in der Tat)それと同じ仕方で(genau) 互いに孤立している。

㉟ [2-6-g-2] 時間の問題については、フッサールの『イデーン』の§§81,82を見よ。Linkeの『現象的領域と実在意識(Die phänomenale Sphäre und das reale Bewußtsein)』Halle,1912),Kap.VI.

㊱ [2-6-h] たとえば連続的なもの（das Stetige)を整数の図式に結びつけることはできないが、それは人間が恣意的にそれできないと決めたからだ、という話ではない。とはいえ、物理の圏域において、未来と量子力学の懐に何が微睡んでいるのか、それは知る由もない。

㊲ [2-7-e] いうまでもなく、このことは我々の演算圏域(Operationsgebiet)での関係にしか妥当しない。この演算圏域では、たとえば「二つの区間は分離されている」という条件は外れている。

㊳ [2-8-c] その第1章§4 の「面の概念(Begriff der Fläche)」を見よ。さらにHausdorffのGrundzüge der Mengenlehre(Veit,1914)、VII章とVIII章、特に213頁と比較せよ。

㊴ [2-8-h] この「連続的」という言葉の意味はおのずから明らかだろう。